

### 3 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE CRESCIMENTO

O estudo do crescimento significa, basicamente, a determinação do tamanho do corpo em função da idade, e por consequência, todos os métodos de avaliação de mananciais trabalham essencialmente com dados de composição de idades. Em águas temperadas, tais dados podem ser geralmente obtidos através da contagem de anéis anuais em partes duras, tais como escamas e otólitos. Esses anéis são formados devido às fortes flutuações ambientais do verão e do inverno, e vice-versa. Em áreas tropicais não ocorrem mudanças drásticas e assim, torna-se muito difícil, senão impossível, usar este tipo de anéis sazonais para a determinação de idades.

Só recentemente foram desenvolvidos métodos para uso de estruturas mais delicadas, chamadas anéis diários, para contar a idade dos peixes em número de dias. Estes métodos, no entanto, requerem equipamentos especiais, caros e muitos recursos humanos, e portanto, não é provável que eles sejam aplicados como rotina em muitos lugares.

Felizmente, foram desenvolvidos vários métodos numéricos que permitem a conversão de dados de frequências de comprimento em composição por idades. Embora estes métodos não requeiram a leitura de anéis em partes duras, a interpretação final dos resultados torna-se muito mais fiável se estiverem disponíveis algumas leituras directas de idades. A melhor resolução na avaliação de mananciais de espécies tropicais é, portanto, uma análise de um grande número de dados de frequências de comprimento, combinada com um pequeno número de leituras de idades com base em anéis diários. Este manual não lida com as técnicas de leitura de idades, mas dá referências a publicações especiais sobre o assunto (ver Secção 3.2.1).

#### 3.1 A EQUAÇÃO DE CRESCIMENTO DE VON BERTALANFFY

Pütter (1920) desenvolveu um modelo de crescimento que pode ser considerado como a base da maioria de outros modelos sobre crescimento, incluindo o modelo matemático desenvolvido para o crescimento individual, por von Bertalanffy (1934), e o qual se tem demonstrado em acordo com o crescimento observado da maioria das espécies de peixes. A teoria por trás dos vários modelos de crescimento é revista, por exemplo, por Beverton e Holt (1957), Ursin (1968), Ricker (1975), Gulland (1983), Pauly (1984) e Pauly e Morgan (1987), no entanto somente trataremos do modelo de crescimento de von Bertalanffy que diz que o comprimento do corpo é uma função da idade. O modelo tornou-se um dos fundamentos básicos em biologia pesqueira, uma vez que é usado como um submodelo em modelos mais complexos que descrevem a dinâmica de populações de peixes. A Fig. 3.1.0.1 ilustra o modelo tanto em forma gráfica como matemática.

O modelo matemático, B, expressa o comprimento L em função da idade do peixe, t:

$$L(t) = L_{\infty} * [1 - \exp(-K*(t-t_0))] \quad (3.1.0.1)$$

O lado direito da equação contém a idade, t, e outros parâmetros que são: " $L_{\infty}$ " (ler "*L-infinito*"), " $K$ " e " $t_0$ " (ler "*t-zero*"). Diferentes curvas de crescimento serão criadas para diferentes conjuntos de parâmetros, sendo possível, portanto, usar o mesmo modelo básico para descrever o crescimento em espécies diferentes, simplesmente usando um conjunto especial de parâmetros para cada espécie.

Para ilustrar o uso do modelo, assume-se que os três parâmetros foram estimados para um manancial particular de peixes, e que os valores são:

$$L_{\infty} = 50 \text{ cm}, K = 0.5 \text{ por ano e } t_0 = -0.2 \text{ ano}$$

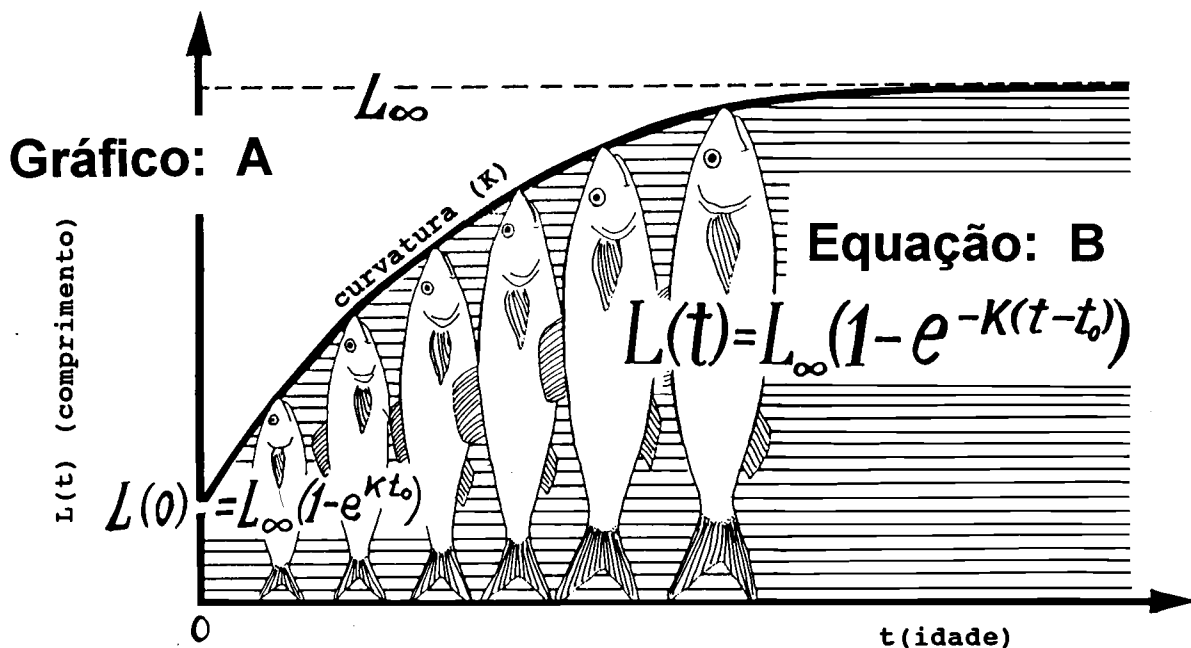


Fig. 3.1.0.1 Equação de crescimento de von Bertalanffy

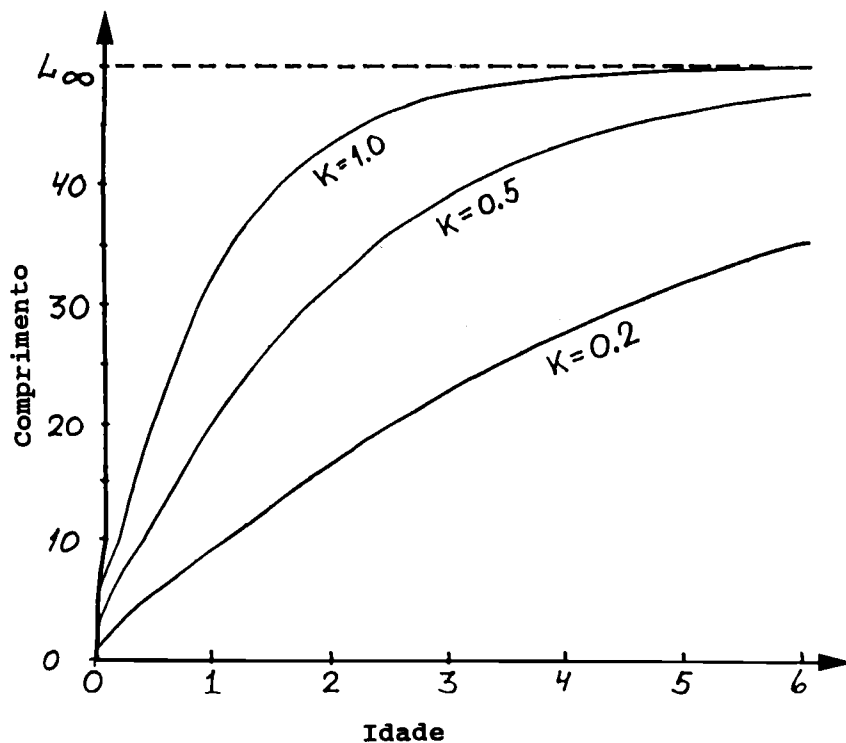


Fig. 3.1.0.2 Uma família de curvas de crescimento com diferentes parâmetros de curvatura, diferentes valores de K

Substituindo, então, estes valores dos parâmetros na equação de crescimento de von Bertalanffy (Eq. 3.1.0.1)

$$L(t) = 50*[1 - \exp(-0.5*(t+0.2))]$$

O comprimento em cm para uma dada idade de um peixe, no manancial em questão, pode agora ser calculado inserindo-se um valor para a idade, t. Por exemplo, t = 2 anos

$$L(2) = 50*[1 - \exp(-0.5*(2+0.2))] = 33.4 \text{ cm}$$

Assim, conhecendo os parâmetros, podemos calcular o comprimento, em qualquer idade, do peixe no manancial em questão:

idade do peixe (ano)	comprimento do corpo do peixe (cm)
0.5	14.8
1.0	22.6
1.5	28.6
2.0	33.4
3.0	39.9
5.0	46.3
..... etc.	

De uma tabela assim, pode-se produzir um gráfico ("curva de crescimento") para este conjunto de parâmetros, como na Fig. 3.1.0.1.

Até um certo ponto, os parâmetros podem ser interpretados biologicamente.  $L_{\infty}$  é interpretado como "o comprimento médio de peixes muito velhos (estritamente: infinitamente velhos)", também chamado "comprimento assintótico" (ver Fig. 3.1.0.1). K é um "parâmetro de curvatura" que determina a velocidade com que o peixe se aproxima do seu  $L_{\infty}$ . Algumas espécies de vida curta, atingem  $L_{\infty}$  em um ano ou dois, e têm um elevado valor de K. Outras espécies têm uma curva de crescimento menos acentuada com um valor de K baixo e precisam de muitos anos para alcançar o  $L_{\infty}$  (ilustrado na Fig. 3.1.0.2). O terceiro parâmetro,  $t_0$ , às vezes chamado "o parâmetro de condição inicial", determina o ponto no tempo no qual o peixe tem um comprimento zero. Biologicamente, isto não tem significado, porque o crescimento começa na eclosão, quando a larva já tem um certo comprimento, que pode ser chamado L(0) quando colocamos t = 0 no dia do nascimento. Isto é facilmente identificado com a inserção de t = 0 na Eq. 3.1.0.1:

$$L(0) = L_{\infty}(1 - \exp(K*t_0))$$

Porém, L(0) pode não ser uma estimativa realista do comprimento à eclosão, porque as larvas de peixe nem sempre crescem de acordo com o modelo de von Bertalanffy. O facto importante é que isto geralmente ocorre para peixes suficientemente velhos que são explorados. Vamos, portanto, voltar a atenção para a descrição do crescimento de peixes (explorados) maiores.

Os peixes aumentam de tamanho com a idade, mas a sua "taxa de crescimento", que é o incremento do tamanho por unidade de tempo, decresce à medida que envelhecem. A taxa de crescimento pode ser definida por:

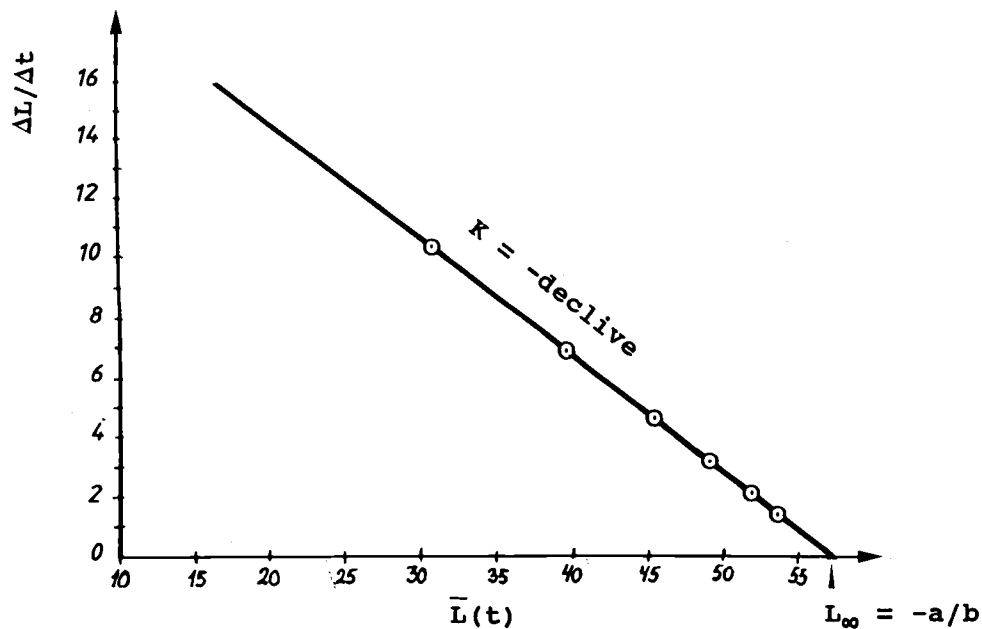
$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{\Delta t} \quad (3.1.0.2)$$

O tempo (ou idade), t, é geralmente expresso em unidades de anos. Se a taxa de crescimento é dada em meses, então:

$$\Delta t = 1/12 \text{ ano} = 0.0833 \text{ ano}$$

**Tabela 3.1.0.1 Taxa de crescimento em função da idade, correspondente à curva de crescimento da Fig. 3.1.0.1. Ver também Fig. 3.1.0.3**

A	B	C	D
idade	comprimento	taxa de crescimento	comprimento médio
t	L(t)	$\frac{L(t+\Delta t)-L(t)}{1} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$	$\frac{L(t+\Delta t)+L(t)}{2} = \bar{L}(t)$
anos	cm	cm/anos (y)	cm (x)
1	25.7	10.3	30.9
2	36.0	6.9	39.5
3	42.9	4.6	45.2
4	47.5	3.2	49.1
5	50.7	2.1	51.8
6	52.8	1.4	53.5
7	54.2		



**Fig. 3.1.0.3 Gráfico da taxa de crescimento contra o comprimento médio. Das colunas C e D da Tabela 3.1.0.1.**

ou em dias, então:

$$\Delta t = 1/365 \text{ ano} = 0.00274 \text{ ano.}$$

Na Tabela 3.1.0.1 as idades (em anos) e o comprimento no início de cada ano (em cm), correspondentes ao exemplo da Fig. 3.1.0.1, são dados nas colunas A e B, respectivamente. A taxa de crescimento é dada na coluna C. É evidente que a taxa de crescimento diminui com o envelhecer dos peixes. A relação matemática entre o comprimento do peixe e a sua taxa de crescimento, em um dado tempo, é uma função linear:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = a + b \cdot L(t) \quad (3.1.0.3)$$

Essa relação linear pode ser calculada da equação de crescimento de von Bertalanffy como se segue:

$\frac{\Delta L}{\Delta t} = K \cdot (L_{\infty} - L(t)) \quad \text{cm/ano} \quad (3.1.0.4)$
---

onde  $K = -b$  e  $L_{\infty} = -a/b$

Não nos iremos preocupar aqui com a prova matemática. Esta relação linear será usada nas secções subsequentes para determinar os parâmetros de crescimento  $K$  e  $L_{\infty}$ . Um exemplo é dado na Fig. 3.1.0.3 onde a taxa de crescimento  $\Delta L/\Delta t$ , como variável dependente, é marcada contra o comprimento médio,  $\bar{L}(t)$ , ao longo do ano correspondente, como variável independente (ver coluna D da Tabela 3.1.0.1):

$$\bar{L}(t) = \frac{L(t+\Delta t) + L(t)}{2}$$

Da Eq. 3.1.0.4 verificamos que, se  $\bar{L}(t) = L_{\infty}$ , então  $\Delta L/\Delta t = K \cdot (L_{\infty} - L_{\infty}) = 0$ , ou seja, quando o peixe atinge o comprimento  $L_{\infty}$  a taxa de crescimento é zero e  $L_{\infty}$  é, assim, o comprimento médio máximo de um peixe. Isso também é ilustrado na Fig. 3.1.0.3. onde a recta de regressão atinge o eixo dos x,  $\Delta L/\Delta t = 0$ , e o correspondente  $L(t)$  no eixo =  $L_{\infty}$ . Adicionalmente,  $K$  pode ser calculado do declive (ver Secção 3.3.1).

### 3.1.1 Variabilidade e aplicabilidade dos parâmetros de crescimento

Os parâmetros de crescimento, logicamente, diferem de espécie para espécie, mas eles também podem variar de manancial para manancial, dentro de uma mesma espécie, isto é, os parâmetros de crescimento de uma determinada espécie podem ter diferentes valores em diferentes partes da sua distribuição. Coortes sucessivas também podem crescer diferentemente dependendo das condições ambientais. Além disso, os parâmetros de crescimento, em geral, têm valores diferentes para os dois sexos. Se houverem diferenças pronunciadas entre os sexos quanto aos parâmetros de crescimento, os dados de entrada deverão ser separados por sexo e os valores de  $K$ ,  $L_{\infty}$  e  $t_0$  deverão ser estimados para cada sexo em separado.

Embora a fisiologia dos crustáceos seja muito diferente da dos peixes, o crescimento médio do corpo também parece seguir o modelo de crescimento de von Bertalanffy (ver Garcia e Le Reste, 1981). Um crustáceo individualmente (isto é, um camarão ou lagosta) não segue o modelo de von Bertalanffy, mas uma "curva em forma de escada", sendo cada degrau correspondente a uma muda (como ilustrado na Fig. 3.1.1.1). No entanto, os membros de uma coorte mudam em momentos diferentes, e portanto a curva de crescimento médio de uma coorte de crustáceos torna-se uma curva uniforme (linha a tracejado). Para uma discussão adicional de modelação em dinâmica de populações de crustáceos ver, por exemplo, Jamieson e Bourne (1986) e Caddy (1987).

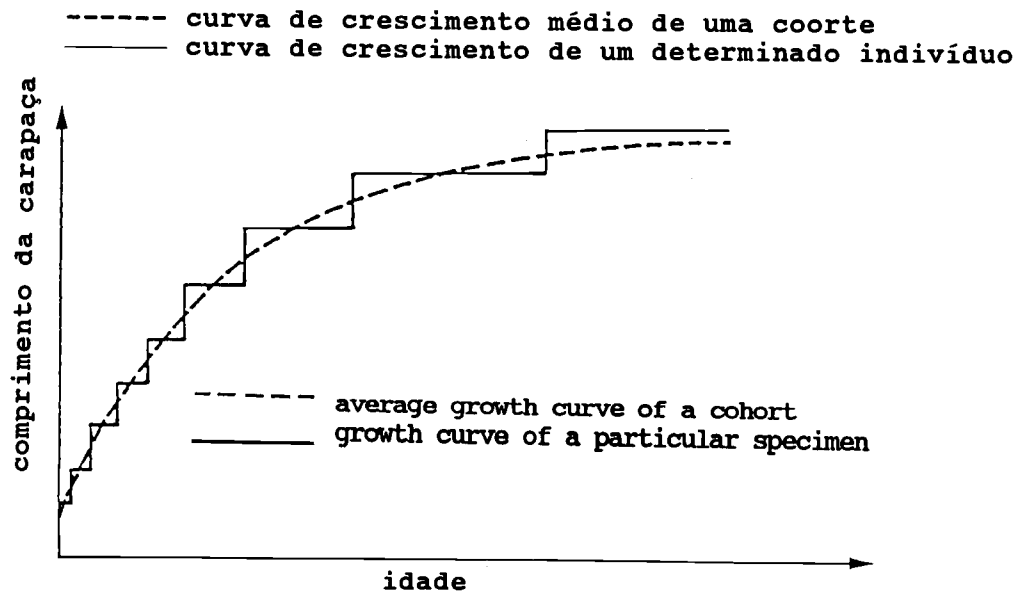


Fig. 3.1.1.1 Curva de crescimento individual e curva média de crescimento de uma coorte de crustáceos

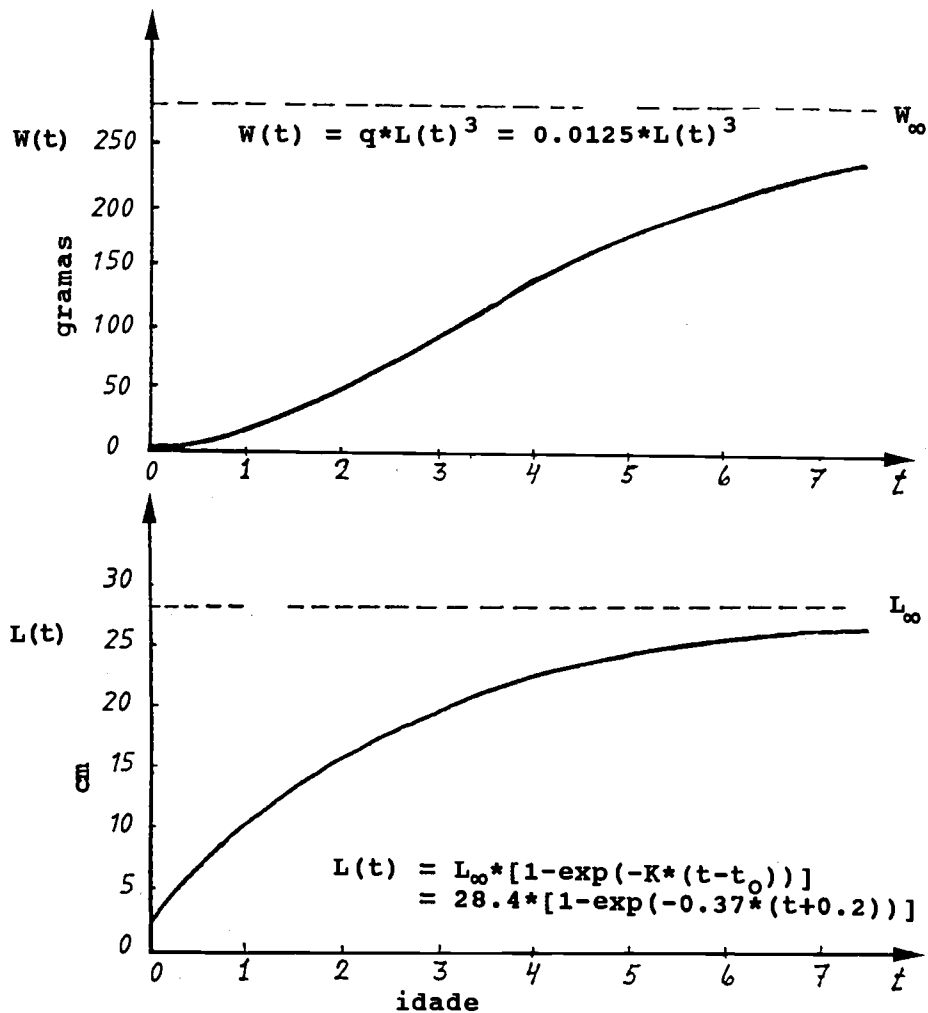


Fig. 3.1.2.1 Curva de crescimento baseada em comprimentos e curva correspondente baseada em pesos

### 3.1.2 A equação de crescimento de von Bertalanffy baseada em pesos

Combinando a equação de crescimento de von Bertalanffy (Eq. 3.1.0.1)

$$L(t) = L_{\infty} * [1 - \exp(-K*(t-t_0))]$$

com a relação peso-comprimento (Eq. 2.6.1)

$$W(t) = q*L^3(t)$$

obtemos o peso de um peixe em função da idade

$$W(t) = q*L_{\infty}^3*[1 - \exp(-K*(t-t_0))]^3$$

O "peso assintótico",  $W_{\infty}$ , correspondente ao comprimento assintótico é (de acordo com Eq. 2.6.1):

$$W_{\infty} = q*L_{\infty}^3$$

O parâmetro,  $q$ , é chamado "factor de condição". (Note que a letra  $q$  é também usada neste manual para designar o coeficiente de capturabilidade, Secção 4.3). Assim, "a equação de von Bertalanffy baseada em pesos" pode ser escrita:

$W(t) = W_{\infty}*[1 - \exp(-K*(t-t_0))]^3$	(3.1.2.1)
--	-----------

A Fig. 3.1.2.1, mostra a equação de crescimento baseada em pesos para os seguintes parâmetros de von Bertalanffy:  $L_{\infty} = 28.4$  cm,  $K = 0.37$  por ano,  $t_0 = -0.2$  ano e o factor de condição  $q = 0.0125$  g por cm cúbico para o falso besugo, *Nemipterus marginatus* nas águas do Norte de Bornéu (Pauly, 1983).

(Ver **Exercício(s)** na Parte 2)

### 3.2 DADOS DE ENTRADA PARA A EQUAÇÃO DE CRESCIMENTO DE VON BERTALANFFY

Existem várias formas de obter os dados de entrada para os métodos usados na estimação dos parâmetros de crescimento  $L_{\infty}$ ,  $K$  e  $t_0$ . Os métodos podem ser agrupados, de uma forma geral, em três:

- 1) Leitura de idades combinadas com medições de comprimento
  - a) dados de prospecções com navios de investigação
  - b) dados de amostras obtidas em capturas comerciais
- 2) Só medições de comprimento
  - a) dados de prospecções com navios de investigação
  - b) dados de amostras obtidas em capturas comerciais
- 3) Experiências de marcação e recaptura, onde duas (ou mais) medidas de comprimento são obtidas: na época de marcação (geralmente num navio de investigação) e na época da recaptura (geralmente pela pesca comercial). Este método é excelente do ponto de vista teórico, mas muito difícil e dispendioso para ser executado; e, não nos estenderemos mais, excepto no Exercício 3.3.1 (ver também Jones, 1977),

Abaixo, vamos considerar primeiro o item 1a) na Secção 3.2.1 e depois 2b) na Secção 3.2.2.

### 3.2.1 Dados de leitura de idades e medições de comprimento

Como afirmado na introdução deste capítulo, a leitura de idade é uma técnica relativamente simples no caso de espécies de águas temperadas, porque os seus otólitos ou escamas mostram anéis sazonais, um para o verão e outro para o inverno, que juntos formam um anel anual. Às vezes tais anéis podem ser perceptíveis, em outros casos, técnicas simples, tais como queimar, podem torná-los visíveis. Os anéis anuais dão suficiente informação para a maioria dos objectivos da avaliação de mananciais.

Infelizmente, espécies de peixes tropicais raramente mostram anéis anuais nítidos nos seus otólitos ou escamas, devido a não existir a forte sazonalidade que caracteriza as zonas temperadas. Contudo, descobertas recentes, têm criado oportunidades de também se ler idades em peixes tropicais, embora com certos limites e um elevado custo em termos de recursos humanos e investimento inicial. Em estudos mais recentes na formação dos anéis em otólitos e escamas, descobriu-se que incrementos diários (ou mesmo incrementos causados por um certo consumo alimentar) podem ser detectados por meio de microscópios potentes. As últimas descobertas indicam que, às vezes, os anéis diários são tão finos que não são visíveis ao microscópio comum, cujo poder de observação é limitado pelo comprimento de onda de luz. Tais anéis podem ser lidos somente por um microscópio eletrónico (Morales-Nin, 1991).

Nos últimos anos, tem-se produzido um grande volume de literatura sobre o assunto, por exemplo: Panella (1971), Bagenal (1974), Brothers (1980), Beamish e Mc Farlane (1983), Gjøsæter et al. (1983), Dayaratne e Gjøsæter (1986) e Williams (1986).

Num manual de avaliação de mananciais pesqueiros tropicais, é necessário concentrar esforços em medidas de comprimento e, conseqüentemente, dar menos ênfase a dados de idade. No entanto lidamos aqui com idades, por duas razões: primeiro, às vezes pode ser viável realizar um pequeno número de leituras de idade, que podem ser usadas para calibrar os resultados obtidos, somente com as medidas de comprimento. Em segundo lugar, é mais fácil explicar os conceitos e a teoria com base em dados de idade e comprimento, do que com base em dados só de comprimento. Para evitar outras complicações nesta fase, vamos usar também dados de navios de investigação. O primeiro exemplo lida com dados de uma única prospecção, enquanto o segundo exemplo utiliza dados de uma série temporal de prospecções.

#### **Exemplo 3: Dados de composição idade/comprimento de uma única prospecção**

Supôr que temos uma amostra aleatória de peixes de um manancial de uma espécie, A. Esta amostra foi tomada num cruzeiro com uma duração de uma quinzena, em que foram feitos lances de arrasto em toda a área de distribuição do manancial, de tal maneira que os dados agrupados de todos os lances resultam numa amostra aleatória (ver Secção 7.1). Supôr que a prospecção ocorreu no outono de 1983, e que os dados de frequências de comprimento agrupados foram obtidos da forma apresentada na última coluna da Tabela 3.2.1.1 (e também na Fig. 3.2.2.1). Supôr também que observámos duas épocas anuais do pico de recrutamento e, portanto, decidimos definir duas coortes por ano:

Coorte de primavera: Peixes recrutados de Janeiro a Junho  
Coorte de outono: Peixes recrutados de Julho a Dezembro

Uma coorte foi definida anteriormente como "um grupo de peixes todos da mesma idade pertencendo ao mesmo manancial" (ver Secção 1.3.1).



**Tabela 3.2.1.1 Composição de idade/comprimento (exemplo hipotético). Dados básicos para a Tabela 3.2.1.2. O gráfico das frequências de comprimento total é mostrado na Fig. 3.2.2.1 ("-" significa zero observações)**

intervalo de comprimento cm	época de recrutamento coorte						prospecção outubro 1983 total de lances
	primavera 1983	outono 1982	primavera 1982	outono 1981	primavera 1981	outono 1980	
12-13	1	-	-	-	-	-	1
13-14	4	-	-	-	-	-	4
14-15	11	-	-	-	-	-	11
15-16	24	-	-	-	-	-	24
16-17	38	-	-	-	-	-	38
17-18	42	-	-	-	-	-	42
18-19	33	-	-	-	-	-	33
19-20	20	-	-	-	-	-	20
20-21	7	-	-	-	-	-	7
21-22	2	1	-	-	-	-	3
22-23	-	3	-	-	-	-	3
23-24	-	5	-	-	-	-	5
24-25	-	8	-	-	-	-	8
25-26	-	11	-	-	-	-	11
26-27	-	14	-	-	-	-	14
27-28	-	16	1	-	-	-	17
28-29	-	15	1	-	-	-	16
29-30	-	13	2	-	-	-	15
30-31	-	11	3	-	-	-	14
31-32	-	7	4	-	-	-	11
32-33	-	4	6	1	-	-	11
33-34	-	2	7	1	-	-	10
34-35	-	1	7	1	-	-	9
35-36	-	-	8	2	-	-	10
36-37	-	-	7	3	1	-	11
37-38	-	-	6	3	1	-	10
38-39	-	-	5	4	1	-	10
39-40	-	-	4	4	2	1	11
40-41	-	-	3	5	2	1	11
41-42	-	-	2	4	2	1	9
42-43	-	-	1	3	2	1	7
43-44	-	-	-	3	3	1	7
44-45	-	-	-	2	2	1	5
45-46	-	-	-	2	2	2	6
46-47	-	-	-	1	2	2	5
47-48	-	-	-	1	1	1	3
48-49	-	-	-	-	1	1	2
49-50	-	-	-	-	1	1	2
50-51	-	-	-	-	1	1	2
51-52	-	-	-	-	-	1	1
total	182	111	67	40	24	15	439
compr. médio	17.3	27.9	35.3	40.2	43.3	45.5	
desvio padrão	1.7	2.7	3.4	3.6	3.8	3.6	
idade média (ano)	0.64	1.16	1.65	2.10	2.64	3.21	

Agora, supondo que também estamos aptos a ler a idade de cada peixe, de forma a podermos determinar o dia em que o peixe nasceu. Depois de ler as idades de todos os 439 peixes da espécie A, capturados no cruzeiro de outubro de 1983, podemos estabelecer para cada peixe uma coorte específica. É então possível fazer uma distribuição de frequências de comprimento para cada coorte. Teoricamente, estas distribuições de frequências possuem uma distribuição normal, para a qual podemos determinar o comprimento médio e o desvio padrão.

A complexa tabela de frequências de comprimento obtida depois do cruzeiro pode ser separada em seis tabelas de frequências de comprimento para as diferentes coortes, das quais sabemos a idade média. O tipo de informação contida nas sete primeiras colunas da Tabela 3.2.1.1 formam a chamada "chave de idade/comprimento" (esse conceito será melhor discutido no Exemplo 7). Os dados principais para cada coorte estão sumariados na Tabela 3.2.1.2.

Assumindo que todas as seis coortes têm os mesmos parâmetros de crescimento, podemos usar os dados da Tabela 3.2.1.2 para estimar os parâmetros comuns de crescimento. Em outras palavras, podemos determinar os parâmetros de crescimento que produzem a curva de crescimento que melhor se ajuste aos pares de dados de comprimento médio e correspondente idade média. A forma como isso é feito será melhor explicada nas secções seguintes.

Note que os dados apresentados na Tabela 3.2.1.1 são dados "hipotéticos" ou "falsificados". Na realidade, eles foram tratados a partir de um conjunto de parâmetros de crescimento (que determinam os comprimentos médios para cada coorte) e de um conjunto de desvios padrão para a distribuição de comprimentos de cada coorte. A idade média da coorte mais jovem é 0.64 ano ou 234 dias, o que significa que o nascimento desta coorte ocorreu 234 dias antes de 15 de Outubro de 1983, ou seja em 23 de Fevereiro de 1983 (primavera do Hemisfério Norte). As outras duas coortes de primavera nasceram, respectivamente, um e dois anos antes, enquanto as três coortes de outono nasceram seis meses depois de cada coorte de primavera. Devido a variações aleatórias as datas de nascimento variam ligeiramente de ano para ano. A vantagem de usar tais dados hipotéticos, no contexto deste manual, é que os verdadeiros parâmetros são conhecidos, o que não é o caso quando se toma os dados de um manancial real. Isto coloca-nos em posição de poder comparar os resultados dos vários métodos de estimação de parâmetros com os valores reais. Os dados apresentados nas Tabelas 3.2.1.1 e 3.2.1.2 também serão usados como exemplos nas Secções 3.4.1 e 3.4.2.

**Tabela 3.2.1.2 Exemplo hipotético de dados de composição de idades e comprimentos da espécie A de um cruzeiro de investigação em Outubro de 1983 (derivados dos "dados brutos" da Tabela 3.2.1.1)**

COORTE		número observado	idade média (ano)	comprimento médio (cm)
ano	recrutamento estação			
1983	primavera	182	0.64	17.3
1982	outono	111	1.16	27.9
1982	primavera	67	1.65	35.3
1981	outono	40	2.10	40.2
1981	primavera	24	2.64	43.3
1980	outono	15	3.21	45.5
total		439		

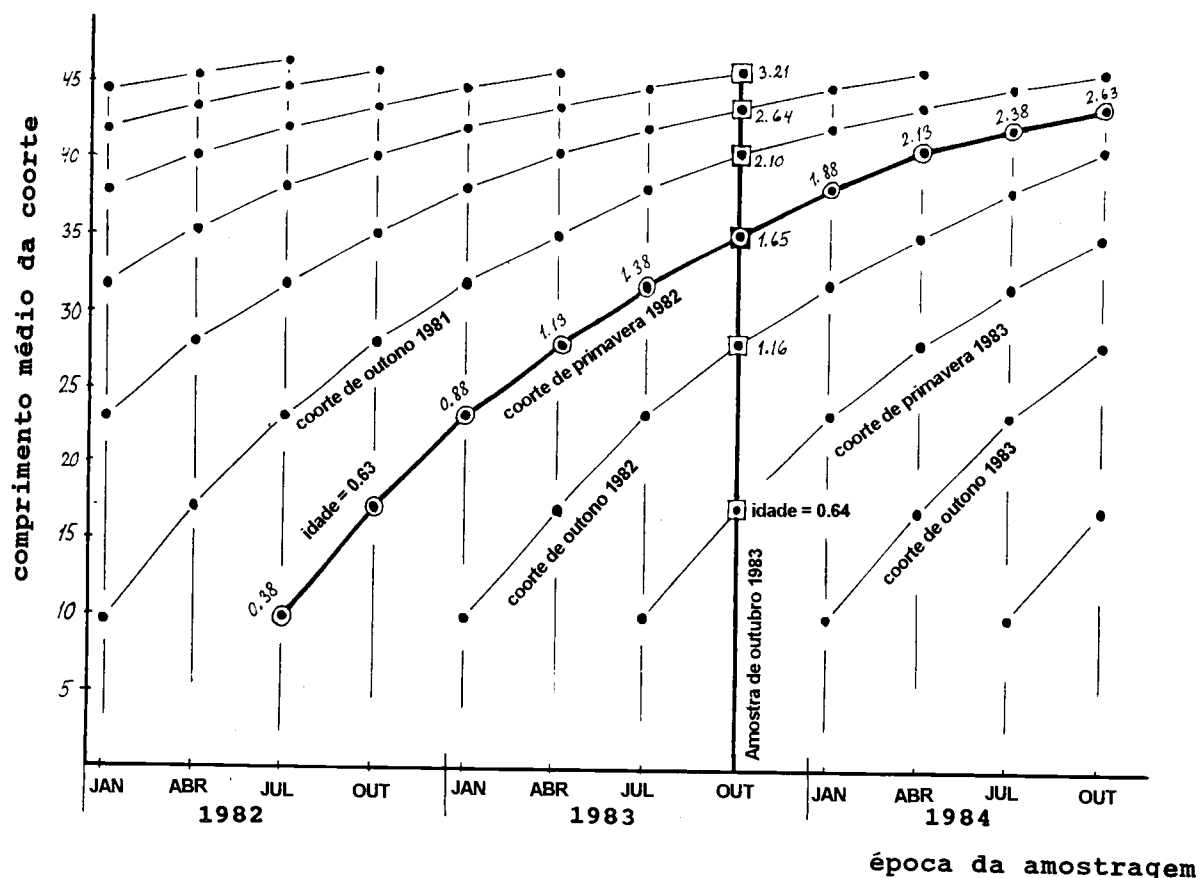


Fig. 3.2.1.1 Ilustração dos dados de idade/comprimento recolhidos durante uma série temporal de cruzeiros

**Exemplo 4: Dados de composição de idade/comprimento de múltiplos cruzeiros**

Se assumirmos agora que o cruzeiro do Exemplo 3 foi apenas um entre uma série de 12 cruzeiros realizados durante os anos de 1982-1984, nos meses de Janeiro, Abril, Julho e Outubro de cada ano, então um programa de cruzeiros assim, produziria 12 tabelas similares à Tabela 3.2.1.1. Amostrando as várias coortes regularmente por um período de tempo, neste caso três anos, pode-se determinar as mudanças nos comprimentos médios marcando-os contra a época da amostragem, como mostra a Fig. 3.2.1.1. Com este conjunto de dados somos capazes de estimar os parâmetros de crescimento para algumas das coortes individualmente. Para o recrutamento da coorte da primavera de 1982, por exemplo, existem 10 pares de dados de idade e comprimento, que podem ser usados para estimar os parâmetros daquela coorte em particular.

A diferença entre seguir uma determinada coorte no tempo, como mostrado aqui, e determinar os diferentes comprimentos médios das várias coortes em um certo momento, como apresentado no Exemplo 3, está ilustrado na Fig. 3.2.1.1, onde os dois diferentes tipos de dados estão indicados nas linhas mais espessas. A curva que começa em Julho de 1982 e vai até Outubro de 1984 mostra o crescimento "real" de uma coorte. A linha vertical da "amostra de Outubro de 1983" mostra uma "secção transversal" do manancial naquela data.

No caso de uma espécie de vida curta (com uma duração de um a dois anos, por exemplo), teríamos que seguir uma coorte no tempo como descrito no Exemplo 4. O método baseado em uma única amostra não seria aplicável, porque ela conteria somente uma ou duas coortes. Embora possa haver diferenças no crescimento das distintas coortes, essa diferença geralmente é tão pequena

que pode ser ignorada. Dados, como aqueles apresentados na Fig. 3.2.1.1, poderiam ser todos agrupados em um conjunto de dados, e usados de modo semelhante aos dados da amostra de Outubro em 1983 (Tabela 3.2.1.1).

É provável que os erros sejam menores se fossem feitas amostragens durante todo o ano. Assim, embora possamos, às vezes, lidar com uma única amostra, é mais seguro usar uma série temporal de amostras.

(Ver **Exercício(s)** na Parte 2).

#### **Exemplo 5: O uso da chave idade/comprimento**

Uma chave de idade/comprimento é uma tabela mostrando, para cada classe de comprimento dos peixes de um certo manancial, as percentagens da distribuição de frequências por idade, ver Tabela 3.2.1.4. Uma vez que esta chave se encontre disponível, amostras de peixes cujos comprimentos foram medidos podem ser distribuídos em grupos de idade conforme a chave.

A chave de idade/comprimento da Tabela 3.2.1.4 poderia estar baseada em 182 peixes obtidos aleatoriamente com a seguinte distribuição de comprimento:

Classe de comprimento (cm)	5-10	10-15	15-20	20-25	Total
Frequências	110	40	22	10	182

O próximo passo é determinar a idade do peixe em cada classe de comprimento. Vamos assumir os resultados mostrados na Tabela 3.2.1.3, e a Tabela 3.2.1.4 é então derivada da Tabela 3.2.1.3 simplesmente dividindo cada coluna pela coluna do Total para cada classe de comprimento.

A Tabela 3.2.1.4 pode então ser usada para determinar a idade de grandes amostras de frequências de comprimento do mesmo manancial (para as quais a composição de idades não é conhecida), por exemplo, a amostra de frequências de comprimento de 21041 peixes dada abaixo:

Classe de comprimento (cm)	5-10	10-15	15-20	20-25	Total
Frequências	12088	7035	1788	130	21041

Distribuindo os números por cada classe de comprimento através dos grupos de idade de acordo com as proporções dadas na Tabela 3.2.1.4, obtemos os resultados apresentados na Tabela 3.2.1.5. Estima-se que a classe de comprimento de 10-15 cm, por exemplo, consiste em  $7035 \times 0.25 = 1759$  peixes do grupo-0 e  $7035 \times 0.75 = 5276$  peixes do grupo-1. Adicionando as colunas verticalmente, finalmente chegamos à composição por idades dada na última linha da Tabela 3.2.1.5.

Assim para estimar a composição por idades das capturas de um determinado manancial necessitamos apenas estabelecer uma chave idade/comprimento baseada em uma pequena amostra de leituras de idades e então restringir as amostras futuras a recolhidas de dados de frequências de comprimento. Estes comprimentos são convertidos em idades através da chave. A mesma chave pode ser usada ao longo dos anos, desde que não se suspeite de grandes alterações na composição por idades do manancial. Porém, em um período de, por exemplo, marcado aumento do esforço de pesca, os peixes mais velhos poderão desaparecer das capturas e então uma nova chave idade/comprimento deverá ser elaborada.

**Tabela 3.2.1.3 Dados de entrada para a estimação de uma chave idade/comprimento (exemplo hipotético)**

classe de comprimento cm	grupo de idade 0	grupo de idade 1	grupo de idade 2	total
5-10	110	0	0	110
10-15	10	30	0	40
15-20	0	11	11	22
20-25	0	1	9	10
total	120	42	20	182

**Tabela 3.2.1.4 Chave idade/comprimento hipotético**

classe de comprimento cm	grupo de idade 0	grupo de idade 1	grupo de idade 2
5-10	1.0	0	0
10-15	0.25	0.75	0
15-20	0	0.5	0.5
20-25	0	0.1	0.9

**Tabela 3.2.1.5 Composição etária de uma grande amostra de frequências de comprimento, estimada pelo uso da chave idade/comprimento na Tabela 3.2.1.4**

classe de comprimento cm	grupo de idade 0	grupo de idade 1	grupo de idade 2	total
5-10	12088	0	0	12088
10-15	1759	5276	0	7035
15-20	0	894	894	1788
20-25	0	13	117	130
total	13847	6183	1011	21041

A Tabela 3.2.1.6 mostra uma chave de idade/comprimento para um peixe tropical de vida longa, a serra-brasileira (*Scomberomorus brasiliensis*). Para ilustrar as limitações de uma chave idade/comprimento, considere a percentagem de distribuição de idades dos peixes com 61-64 cm de comprimento, tendo 4-7 anos de idade. Se agora a mortalidade por pesca (esforço) aumentar consideravelmente, poderão ser exterminados a maioria dos peixes com 5 ou mais anos. Sendo assim, os poucos peixes de 61-64 cm que continuam a ser capturados serão peixes de 4 anos de idade, de rápido crescimento, restando poucos peixes com 5 anos de idade e os peixes de 6 a 7 anos terão desaparecido. Usando a velha chave na nova distribuição de frequências de comprimento éramos levados a concluir que os peixes de 61-64 cm têm ainda 4-7 anos de idade, com o grupo 5 dominando, quando de facto eles têm apenas 4 anos de idade.

**Tabela 3.2.1.6 Chave idade/comprimento para *Scomberomorus brasiliensis* baseada em leituras de otólitos, em percentagens de classes de 3 cm de comprimento, (Sturm, 1974)**

classes de comprimento cm	grupos de idade (ano)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13-16	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-
16-19	-	100	-	-	-	-	-	-	-	-
19-22	-	100	-	-	-	-	-	-	-	-
22-25	-	100	-	-	-	-	-	-	-	-
25-28	-	96	4	-	-	-	-	-	-	-
28-31	-	55	45	-	-	-	-	-	-	-
31-34	-	5	95	-	-	-	-	-	-	-
34-37	-	-	91	9	-	-	-	-	-	-
37-40	-	-	73	27	-	-	-	-	-	-
40-43	-	-	33	63	2	-	-	-	-	-
43-46	-	-	15	77	8	-	-	-	-	-
46-49	-	-	5	65	29	-	-	-	-	-
49-52	-	-	1	47	50	2	-	-	-	-
52-55	-	-	-	38	51	11	-	-	-	-
55-58	-	-	-	10	62	21	7	-	-	-
58-61	-	-	-	3	50	25	22	-	-	-
61-64	-	-	-	-	19	44	31	6	-	-
64-67	-	-	-	-	-	66	17	17	-	-
67-70	-	-	-	-	-	-	75	25	-	-
70-73	-	-	-	-	-	-	-	33	33	33
> 73	-	-	-	-	-	-	-	-	50	50

Na recolha de amostras para uma chave de idade/comprimento, é importante incluir na amostra indivíduos bem pequenos e bem grandes. Senão quando um grande número de indivíduos são distribuídos através dos grupos de idade observa-se que algumas classes de tamanho representadas nestas amostras de comprimento não estão na chave. Quando peixes pequenos e grandes são deliberadamente sobre representados na chave é importante lembrar que os dados da chave isoladamente não podem ser usados para a estimação de parâmetros de crescimento ou mortalidade.

A metodologia de avaliação de mananciais pode, de facto, estar inteiramente baseada apenas na composição de idade/comprimento. A aplicação de modelos matemáticos de crescimento não é necessaria. Até um certo grau, este é o caso das avaliações feitas pelo Comité Internacional para a Exploração do Mar (CIEM) no Atlântico Norte. No entanto, como as chaves idade/comprimento fiáveis, para a maioria das espécies tropicais não deverão estar disponíveis num futuro próximo, bem como por outras razões que serão discutidas nos Capítulos seguintes, neste manual, foi dado maior prioridade aos modelos matemáticos de crescimento.

### 3.2.2 Dados de composição por comprimentos (sem composições de idades)

Assume-se que temos um conjunto de dados de frequências de comprimentos de uma certa espécie, mas sem leituras de idades. O conjunto de dados básicos para uma data determinada da amostragem seria, então, semelhante à (última) coluna do "total" da Tabela 3.2.1.1, ou como mostrado na Fig. 3.2.2.1. Seria possível obter uma separação das várias coortes desta amostra, sem usar as técnicas de leitura de idades? A resposta é que, sob certas condições, é possível, excepto quando os intervalos de frequências de comprimento das diferentes coortes sobreponham-se muito.

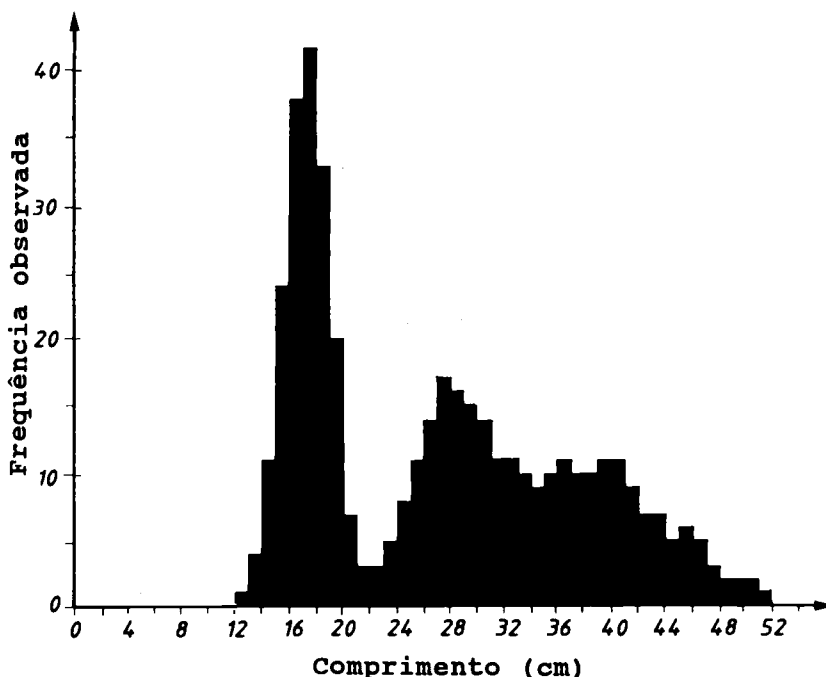


Fig. 3.2.2.1 Amostra de frequências de comprimento. Os únicos dados básicos em casos onde não é possível a leitura de idades nas partes duras. (Frequências da "coluna total" da Tabela 3.2.-1.1)

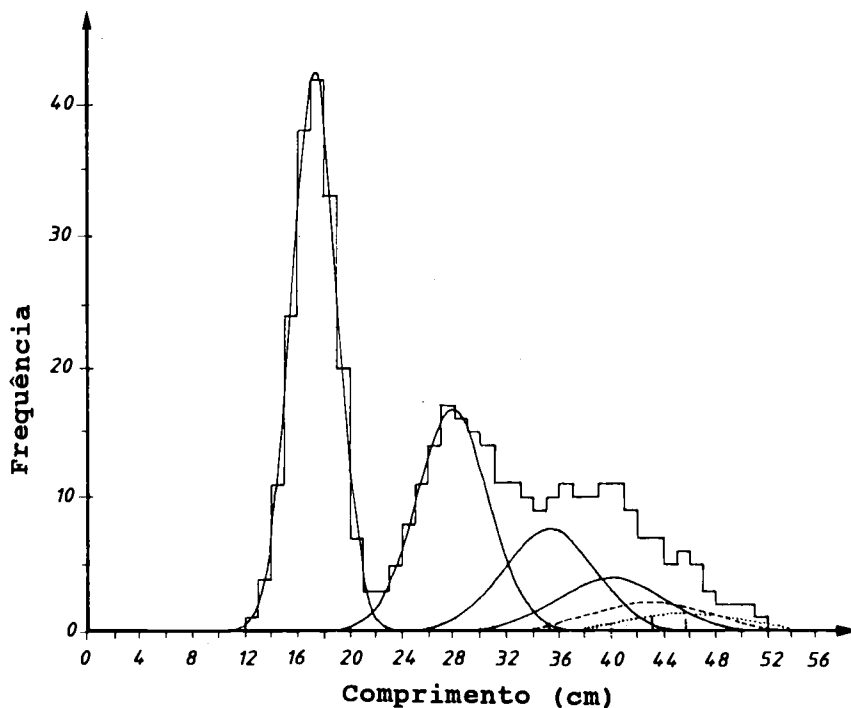


Fig. 3.2.2.2 Amostra de frequências de comprimento da Fig. 3.2.2.1, separada em componentes da distribuição normal (frequências da "coluna total" da Tabela 3.2.1.1). Este exemplo também é usado para ilustrar o "método de Bhattacharya" descrito na Secção 3.4.1 e o "método de máxima probabilidade" discutido na Secção 3.5.3

Os dados hipotéticos apresentados na Tabela 3.2.1.1 foram criados a partir de um número de componentes distribuídos como uma normal, representando coortes, conforme mostrado na Fig. 3.2.2.2.

Na Fig. 3.2.2.1 a coorte mais jovem, a coorte da primavera de 1983, pode ser facilmente distinguida do resto da amostra. A próxima coorte, mais à direita, é um pouco mais difícil de distinguir, enquanto as restantes quatro coortes só podem ser distinguidas através de métodos mais sofisticados que a simples inspeção visual, ou podem mesmo nem ser possível separá-las de maneira nenhuma.

Na Secção 3.4 serão introduzidos métodos que, podem ser utilizados para separar amostras de frequências de comprimento em componentes com uma distribuição normal, que são assumidos como representantes das coortes. Será demonstrado, com base no mesmo conjunto de dados, que na prática não é viável separar mais do que três ou quatro coortes do conjunto total. A sobreposição na composição de comprimentos das coortes mais velhas, peixes maiores, limita claramente a análise. Portanto, as conclusões que podem ser tiradas de tal conjunto de dados, comparando-se aos casos onde a idade do peixe pode ser determinada, são também limitadas.

### **3.2.3 Dados de capturas comerciais**

Pode-se também obter dados para estimar os parâmetros de crescimento através de amostragens a capturas comerciais. Os princípios básicos para a análise das amostras de desembarques comerciais são os mesmos dos dados de cruzeiros de investigação. A principal diferença está nos problemas dos erros. Os barcos comerciais nunca se esforçam para capturar amostras aleatoriamente do manancial, porque eles vão sempre à procura dos tamanhos comerciáveis e tentam encontrar as áreas onde há maior concentração de peixes. No entanto, tendo em mente as fontes de erro, e tentando estratificar a amostragem para minimizá-los, os dados das pescarias comerciais podem ser usados da mesma forma para estimar os parâmetros de crescimento.

A principal vantagem de amostrar capturas comerciais é que a recolha de tais amostras é mais barata e, assim, a amostragem pode ser muito mais frequente do que nos cruzeiros de investigação. No Capítulo 7, os problemas em relação à amostragem de capturas comerciais são mais cuidadosamente elaborados.

### **3.3 MÉTODOS PARA ESTIMAR PARÂMETROS DE CRESCIMENTO A PARTIR DE DADOS DE COMPRIMENTO À IDADE**

Nesta Secção, assumimos que pares de observações de idade e comprimento estão disponíveis, podendo ser derivados tanto de leituras de anéis em estruturas duras, como de análise de frequências de comprimento (Secções 3.4 e 3.5). Os dados de entrada estão tanto na forma pormenorizada de uma composição de idade/comprimento (como na Tabela 3.2.1.1), como na forma processada mostrada na Tabela 3.2.1.2. Eles podem ser ou não derivados de uma série temporal de amostras (cf. Fig. 3.2.1.1). Para simplificar o formato dos dados de entrada utilizado será como ilustrado na Tabela 3.2.1.2.

Os parâmetros de crescimento podem ser derivados de tais dados por métodos gráficos, que se baseiam numa conversão para uma equação linear, como discutido no Capítulo 2. Estes gráficos adquiriram o nome dos autores das publicações que os descreveram pela primeira vez, como Gulland e Holt (1959), Chapman (1961), Ford-Walford (1933 e 1946 respectivamente) e von Bertalanffy (1934). Outro método a ser discutido é o "método dos mínimos quadrados".



### 3.3.1 Método gráfico de Gulland e Holt

O método gráfico de Gulland e Holt (1959) foi introduzido na Secção 3.1 pela Eq. 3.1.0.4, que também pode ser escrita:

$$\Delta L/\Delta t = K \cdot L_{\infty} - K \cdot \bar{L}(t) \quad (3.3.1.1)$$

O comprimento "L(t)" na Eq. 3.1.0.4 representa o intervalo de comprimento L(t) na idade t a L(t+Δt) na idade t+Δt. Assim, a quantidade que normalmente é usada na Eq. 3.3.1.1 é o comprimento médio (cf. o exemplo na Tabela 3.1.0.1):

$$\bar{L} = \frac{L(t+\Delta t) + L(t)}{2}$$

Somente se Δt é pequeno,  $\bar{L}(t)$  pode ser uma razoável aproximação do comprimento médio. No entanto, Δt não necessita de ser constante, o que é uma vantagem importante sobre os outros métodos.

Usando  $\bar{L}(t)$  como variável independente e ΔL/Δt como variável dependente, a Eq. 3.3.1.1 transforma-se numa regressão linear:

$$\Delta L/\Delta t = a + b \cdot \bar{L}(t)$$

Os parâmetros de crescimento K e  $L_{\infty}$  são obtidos de:

$$K = -b \quad e \quad L_{\infty} = -a/b$$

A Tabela 3.1.0.1 contém um exemplo de dados de entrada (colunas C e D) e a Fig. 3.1.0.3 mostra o gráfico correspondente. O incremento anual do comprimento ou taxa de crescimento é marcado contra o comprimento médio durante o ano correspondente. A análise de regressão dá-nos:

$$a = 22.40 \quad e \quad b = -0.3923 \quad \text{dos quais chegamos a}$$

$$K = -b = 0.39 \text{ digamos } 0.4 \text{ por ano,} \quad e \quad L_{\infty} = -a/b = 57.1 \text{ cm}$$

#### Exemplo 6: Estimação de K e $L_{\infty}$ através do método gráfico de Gulland e Holt

Outro exemplo do método gráfico de Gulland e Holt pode ser derivado da Tabela 3.2.1.2, como mostra a Tabela 3.3.1.1. Das estimações da intersecção e do declive obtemos:

$$K = -b = 0.77 \text{ digamos } 0.8 \text{ por ano}$$

$$L_{\infty} = -a/b = -38.52/-0.7670 = 50.2 \text{ cm}$$

Os limites de confiança de 95% para K são os mesmos que os de b, mas com sinais trocados, isto é, [0.56, 0.98] (cf. Tabela 3.3.1.1). Os limites de confiança de  $L_{\infty}$  são mais complicados de obter. Contudo, podemos dizer que para um dado valor de K, o intervalo de confiança de  $L_{\infty}$  pode ser calculado a partir do intervalo de confiança de a. Se K = 0.8 e os limites de confiança de a são [31.0/0.8, 46.0/0.8] = [38.7, 57.5], então os limites de confiança de  $L_{\infty}$  serão [31.0/0.8, 46.0/0.8] = [38.7, 57.5]. Estes não são realmente os limites de confiança de  $L_{\infty}$ , mas sim os limites condicionados a K = 0.8. (Realmente, os limites de confiança de uma razão não são definidos, mas a teoria referente está fora dos objectivos deste manual). A Fig. 3.3.1.1 mostra o gráfico de Gulland e Holt correspondente à Tabela 3.3.1.1.

**Tabela 3.3.1.1** Dados de entrada para o gráfico Gulland e Holt e análise de regressão (dados derivados da Tabela 3.2.1.1)

t	$\Delta t$	L(t)	$\Delta L(t)$	$\frac{\Delta L(t)}{\Delta t}$ (y)	$\frac{L(t+\Delta t)+L(t)}{2} = \bar{L}(t)$ (x)
0.64	0.52	17.3	10.6	20.4	22.6
1.16	0.49	27.9	7.4	15.1	31.6
1.65	0.45	35.3	4.9	10.9	37.7
2.10	0.54	40.2	3.1	5.7	41.8
2.64	0.57	43.3	2.2	3.9	44.4
3.21		45.5			

b (declive) = -0.7670, a (intersecção) = 38.52, n = 5,  $\bar{x}$  = 35.62

$$sb^2 = \frac{1}{n-2} * [(sy/sx)^2 - b^2] = \frac{1}{3} * [(6.7727/8.7362)^2 - 0.7670^2] = 0.004216$$

$$sb = 0.06493, \quad t_{n-2} = 3.18, \quad sb * t_{n-2} = 0.2065$$

limites de confiança de 95% para b: [-0.974 , -0.561] (ver Secção 2.4)

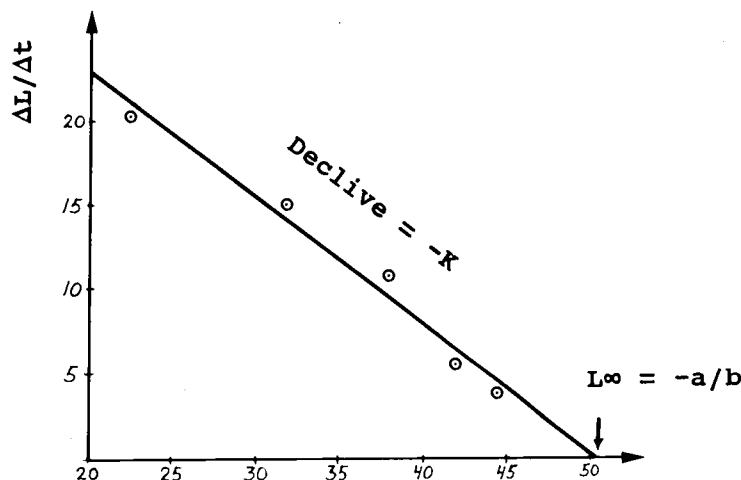
$$K = -b = 0.77 \pm 0.21$$

$$sa^2 = sb * \left( \frac{n-1}{n} * sx^2 + \bar{x}^2 \right) = 0.004216 * \left( \frac{4}{5} * 8.7362^2 + 35.62^2 \right) = 5.607$$

$$sa = 2.368 \quad sa * t_{n-2} = 7.53$$

limites de confiança de 95% para a: [31.0 , 46.0]

$$L_{\infty} = -a/b = -38.52/-0.7670 = 50.2 \text{ cm}$$



$$\bar{L}(t) = [L(t+\Delta t)+L(t)]/2$$

**Fig. 3.3.1.1** Gráfico de Gulland e Holt correspondendo à Tabela 3.3.1.1 (-exemplo hipotético). O ponto de intersecção entre a recta de regressão e o eixo de comprimentos L dá  $L_{\infty}$

Na Secção 3.1 afirmou-se que, matematicamente, pode-se provar que a Eq. 3.1.0.4:  $\Delta L/\Delta t = K*(L_{\infty}-L(t))$  é equivalente a equação de crescimento de von Bertalanffy (Eq. 3.1.0.1):

$$L(t) = L_{\infty}*[1 - \exp(-K*(t-t_0))]$$

Porém, isto é correcto somente se o intervalo de tempo  $\Delta t$ , é infinitesimal. Assim sendo, o método gráfico de Gulland e Holt, baseado na Eq. 3.1.0.4, é uma aproximação razoável somente para valores pequenos de  $\Delta t$ .

(Ver **Exercício(s)** na Parte 2).

### 3.3.2 Método gráfico de Ford-Walford e método de Chapman

O método introduzido por Ford (1933) e Walford (1946) ganhou larga aplicação devido a se obter uma rápida estimação de  $L_{\infty}$ , através directamente do gráfico, sem cálculos. Actualmente ele não é muito usado e foi incluído aqui somente porque é sempre referenciado em publicações antigas.

Da equação de crescimento de von Bertalanffy (Eq. 3.1.0.1) e seguindo uma série de manipulações algébricas, vem:

$$L(t+\Delta t) = a + b*L(t) \tag{3.3.2.1}$$

Onde  $a = L_{\infty}*(1-b)$  e  $b = \exp(-K*\Delta t)$

Como  $K$  e  $L_{\infty}$  são constantes,  $a$  e  $b$  também ficam constantes se  $\Delta t$  for uma constante. Os parâmetros de crescimento  $K$  e  $L_{\infty}$  são derivados de:

$$K = -\frac{1}{\Delta t}*\ln b \quad e \quad L_{\infty} = \frac{a}{1-b}$$

Para ilustrar o uso da Eq. 3.3.2.1 considere a Tabela 3.3.2.1, onde os números na coluna A representam comprimentos  $L(t)$ , em uma série de idades com um intervalo de tempo constante de um ano, enquanto a coluna B contém os comprimentos  $L(t+\Delta t)$ , correspondentes a um ano depois.

Desenvolvendo a análise de regressão obtemos:

$$a = 18.70 \quad e \quad b = 0.6725$$

de onde derivamos:

$$K = -(1/1)*\ln 0.6725 = 0.3968, \text{ digamos } 0.4 \text{ por ano e}$$

$$L_{\infty} = 18.70/(1-0.6725) = 57.1 \text{ cm}$$

O diagrama (gráfico) de Ford-Walford correspondente a estes dados é mostrado na Fig. 3.3.2.1.  $L_{\infty}$  pode ser estimado graficamente do ponto de intersecção da diagonal de  $45^\circ$  (onde  $L(t) = L(t+\Delta t)$ ) com a recta de regressão, pois para peixes muito velhos, que pararam de crescer,  $L_{\infty} = L(t) = L(t+\Delta t)$ .

Também o método descrito por Chapman (1961) e depois por Gulland (1969) é baseado em um intervalo de tempo constante  $\Delta t$ , o que significa que o método é aplicável para pares de observações:

$$(t, L(t)), (t+\Delta t, L(t+\Delta t)), (t+2\Delta t, L(t+2\Delta t)), \text{ etc.}$$

Tabela 3.3.2.1 Pares de comprimentos consecutivos, com  $\Delta t = 1$  ano, derivados da Tabela 3.1.0.1.

A e B: Dados de entrada para o gráfico Ford-Walford (Ver Fig. 3.3.2.1)

A e C: Dados de entrada para o método de Chapman (Ver Fig. 3.3.2.2)

	A	B	C
t	L(t) (x)	L(t+ $\Delta t$ ) (y)	L(t+ $\Delta t$ )-L(t) (Y)
1	25.7	36.0	10.3
2	36.0	42.9	6.9
3	42.9	47.5	4.6
4	47.5	50.7	3.2
5	50.7	52.8	2.1
6	52.8	54.2	1.4

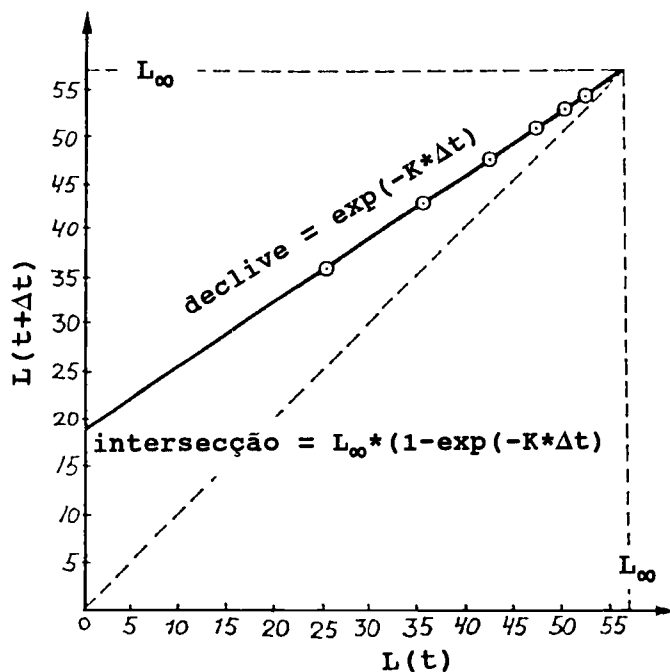


Fig. 3.3.2.1 Gráfico de Ford-Walford. Dados das colunas A e B da Tabela 3.3.2.1

Demonstra-se que a equação de crescimento de von Bertalanffy (Eq. 3.1.0.1) implica que:

$$L(t+\Delta t) - L(t) = c \cdot L_{\infty} - c \cdot L(t) \quad (3.3.2.2)$$

onde  $c = 1 - \exp(-K \cdot \Delta t)$ .

Assim, se  $K$  e  $L_{\infty}$  são constantes, e  $\Delta t$  permanecer constante,  $c$  permanecerá constante e consequentemente a Eq. 3.3.2.2 torna-se uma regressão linear:

$$y = a + bx$$

onde  $y = L(t+\Delta t) - L(t)$ ,  $a = c \cdot L_{\infty}$ ,  $b = -c$  e  $x = L(t)$

Note que o declive é negativo e que é utilizado o menor dos dois comprimentos na abcissa (eixo dos x), em vez dos valores médios (ver Secção 3.3.1).

Os parâmetros de crescimento são derivados de:

$$K = -(1/\Delta t) \cdot \ln(1+b) \text{ e } L_{\infty} = -a/b \text{ ou } a/c$$

Para ilustrar o uso da Eq. 3.3.2.2 considere novamente a Tabela 3.3.2.1, onde  $L(t) = x$  na coluna A e  $L(t+1) - L(t) = y$ , na coluna C. A regressão linear dá:

$$\begin{aligned} a &= 18.70 \text{ e } b = -0.3275 \text{ e então } c = 0.3275 \\ K &= -(1/1) \cdot \ln(1-0.3275) = 0.3968, \text{ digamos } 0.4 \text{ por ano} \\ L_{\infty} &= 18.70/0.3275 = 57.1 \text{ cm} \end{aligned}$$

O gráfico é mostrado na Fig. 3.3.2.2

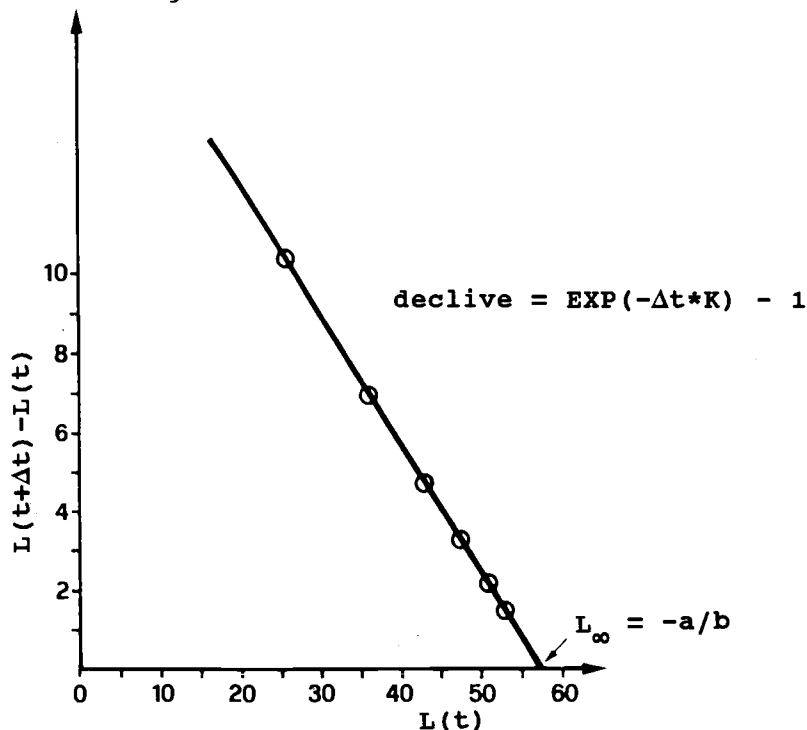


Fig. 3.3.2.2 Gráfico de Chapman. Dados das colunas A e C da Tabela 3.3.2.1

Os três métodos descritos nas Secções 3.3.1 e 3.3.2 fornecem aproximadamente os mesmos resultados quando aplicados aos dados da Tabela 3.1.0.1. Isto deve-se ao facto de os dados ajustarem-se exactamente à equação de von Bertalanffy, pois eles foram obtidos da equação através do retrocálculo. Com dados reais espera-se encontrar algumas diferenças nos resultados.

Os três métodos descritos acima podem ser usados para estimar  $K$  e  $L_{\infty}$ . Um quarto método, o diagrama de von Bertalanffy, pode ser usado para se obter uma estimativa de  $K$  e  $t_0$ . No entanto, este método requer uma estimativa de  $L_{\infty}$  (ver Secção 3.3.3)

$L_{\infty}$  também pode ser estimado pelo "método de Powell-Wetherall". Como este método também pode ser utilizado na obtenção de uma estimativa do coeficiente de mortalidade total,  $Z$ , será apresentado no próximo capítulo na Secção 4.5.4.

(Ver **Exercício(s)** na Parte 2).

### 3.3.3 Método gráfico de von Bertalanffy

O primeiro método para estimar os parâmetros de von Bertalanffy foi sugerido por von Bertalanffy (1934). Ele pode ser utilizado para estimar  $K$  e  $t_0$  a partir dos dados de idade/comprimento, contudo necessita de uma estimativa de  $L_\infty$  como entrada.

A equação de crescimento de von Bertalanffy (Eq. 3.1.0.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-\ln(1 - L(t)/L_\infty) = -K*t_0 + K*t \quad (3.3.3.1)$$

Com a idade,  $t$ , como variável independente ( $x$ ), e o lado esquerdo da equação como variável dependente ( $y$ ), a equação define uma regressão linear, onde a inclinação  $b = K$  e a intersecção  $a = -K*t_0$ .

#### Exemplo 7: Estimativa de $K$ e $t_0$ através do método gráfico de von Bertalanffy

A Tabela 3.3.3.1 mostra como calcular os dados de entrada para o método gráfico de von Bertalanffy, baseados em dados da Tabela 3.3.1.1 com  $L_\infty = 50$  cm. O gráfico é representado na Fig. 3.3.3.1. Compare o valor de  $K$  (0.78 por ano) com a estimativa obtida pelo método gráfico de Gulland e Holt ( $K = 0.77 \pm 0.21$ ) com os mesmos dados.

O método gráfico de von Bertalanffy é mais consistente que o de Gulland e Holt (e o de Ford-Walford), pois ao se estimar um valor razoável de  $L_\infty$  ele dá, quase sempre, uma estimativa razoável de  $K$ , (como ilustrado no Exercício 3.3.3). No entanto, deve-se verificar se o gráfico (Fig. 3.3.3.1) "parece" linear. Por outro lado, pode-se dizer que o método gráfico de Gulland e Holt é mais robusto, por ser melhor em ressaltar casos em que as observações estejam em conflito com o modelo de von Bertalanffy.

Recordando a interpretação de  $L_\infty$  como o comprimento médio de um peixe muito velho, existem vários métodos mais simples, de estimar  $L_\infty$ , para uso no gráfico de von Bertalanffy:

**Tabela 3.3.3.1** Dados de entrada e regressão para o gráfico de von Bertalanffy (dados derivados da Tabela 3.3.1.1,  $L_\infty = 50$  cm)

$t$ ( $x$ )	$L(t)$	$-\ln(1-L(t)/L_\infty)$ ( $y$ )
0.64	17.3	0.425
1.16	27.9	0.816
1.65	35.3	1.224
2.10	40.2	1.630
2.64	43.3	2.010
3.21	45.5	2.408
a = -0.0680		b = 0.7825
K = b = 0.78 por ano		
$t_0 = -a/b = 0.087$ ano		

- 1) Nas amostras pequenas, pode-se simplesmente usar o peixe maior.
- 2) Numa amostra muito grande, pode-se usar a média dos comprimentos dos 10 maiores peixes.
- 3) A melhor forma talvez de estimar  $L_\infty$  e através do método de Powell-Wetherall descrito na Secção 4.5.4.

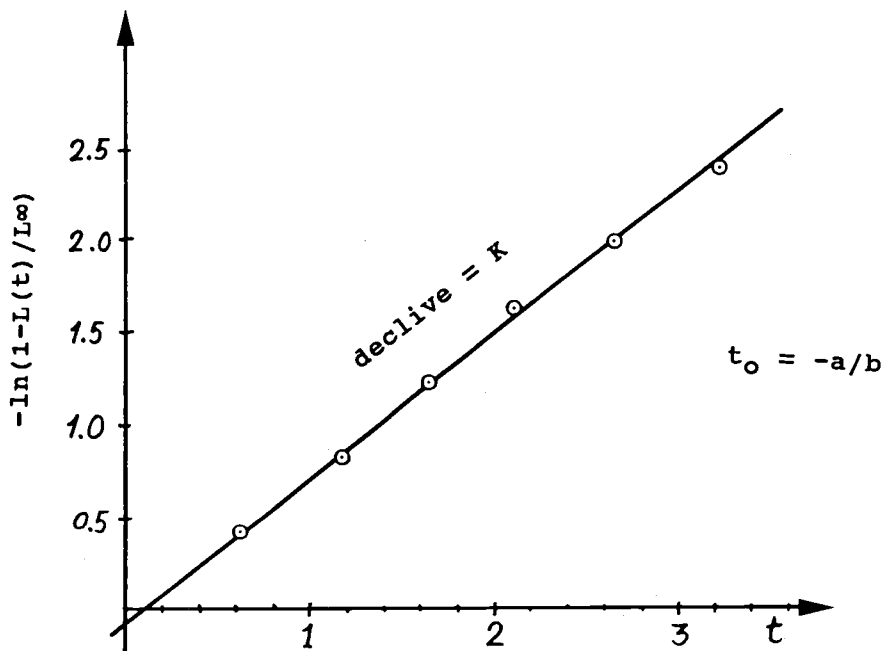


Fig. 3.3.3.1 Gráfico de von Bertalanffy para os dados da Tabela 3.3.3.1

A estimação de  $L_{\infty}$  que é utilizada pode não ser importante; pois ao se sobrestimar  $L_{\infty}$ , o  $K$  será subestimado, e juntos eles contrabalançam-se, de modo que a curva de crescimento resultante permanece semelhante para a amplitude de idades representadas no conjunto de dados. (Este aspecto será melhor discutido na Secção 3.4).

Existe, contudo, um problema com a aplicação do método gráfico de von Bertalanffy com respeito à definição de  $L_{\infty}$ . O argumento do logaritmo na Eq. 3.3.3.1, isto é,  $(1 - L(t)/L_{\infty})$  deve ser positivo, senão o logaritmo não será definido. Assim, o método gráfico de von Bertalanffy não pode aceitar um comprimento maior que o  $L_{\infty}$ , visto poder acontecer, de acordo com a definição de  $L_{\infty}$  como é dada na Secção 3.1.4, os peixes muito velhos terem um  $L(t) > L_{\infty}$ , porque as observações  $(t, L(t))$  andam em torno da recta que define  $L_{\infty}$ . Sendo assim, o método de von Bertalanffy na verdade utiliza a "equação inversa de von Bertalanffy":

$$t(L) = t_0 - \frac{1}{K} \ln(1 - L/L_{\infty}) \quad (3.3.3.2)$$

que é a Eq. 3.1.0.1 resolvida para  $t$ . Pode ser necessário omitir os peixes mais velhos para obter  $1 - L/L_{\infty} > 0$ .

O conceito de  $L_{\infty}$ , como aplicado no método gráfico de von Bertalanffy, é diferente do aplicado no método de Gulland e Holt, pelas mesmas razões que os parâmetros da "regressão linear inversa" diferem dos da "regressão linear original".

(Ver **Exercício(s)** na Parte 2)

### 3.3.4 Método dos mínimos quadrados

Do ponto de vista da teoria de amostragem, este método é considerado superior aos métodos introduzidos nas secções anteriores. É um método não-linear e corresponde à análise de regressão linear introduzida na Secção 2.4. No entanto o seu cálculo é grande e na prática necessita-se de um computador para efectuá-lo.

Assume-se que uma série de pares de observações (comprimento, idade) estão disponíveis, obtidos ou através de leituras de idades (cf. Secção 3.2.1) ou derivados por análise de progressão modal (a ser discutida na Secção 3.4.2). Seja  $n$  pares de observações:

$$(L(i), t(i)) = (\text{comprimento do peixe nº } i, \text{ idade do peixe nº } i)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, n$ .

O método estima os parâmetros de crescimento, de tal modo que a soma dos quadrados dos desvios entre o modelo e as observações é minimizada, isto é, minimiza a soma em relação aos parâmetros  $L_\infty$ ,  $K$  e  $t_0$ :

$$\sum_{i=1}^n [L(i) - L_\infty * [1 - \exp(-K*(t(i)-t_0))]]^2 \quad (3.3.4.1)$$

### Programas de computadores

O pacote de programas para microcomputadores, LFSA, para avaliação de mananciais pesqueiros (Sparre, 1987), contém o programa "VONBER", que faz a estimação dos mínimos quadrados dos parâmetros de crescimento. O método usado por este programa é bastante complicado, e uma ampla explicação do mesmo foge aos objectivos deste manual. No entanto, conceptualmente, uma análise de regressão não linear não é mais complexa que a simples regressão linear, assim como a raiz quadrada de 3 não é, conceptualmente, mais complexa que a raiz quadrada de 4, esta última, porém, mais fácil de ser calculada. O FISAT contém também um programa idêntico e muitos outros programas de computador similares estão disponíveis (ver Capítulo 15).

### 3.4 ESTIMAÇÃO DA COMPOSIÇÃO DE IDADES A PARTIR DAS FREQUÊNCIAS DE COMPRIMENTO

Na Secção 3.3 lidámos com métodos para a estimação de parâmetros de crescimento da equação de von Bertalanffy. Todos estes métodos requerem dados de comprimento e de idade. Conforme afirmado anteriormente, é difícil determinar a idade de peixes tropicais e, na maioria dos casos, apenas dados de frequências de comprimento estão disponíveis. O objectivo dos métodos descritos abaixo é estabelecer idades para um certa classe de comprimento. Em outras palavras, o objectivo é separar uma distribuição complexa de frequências de comprimento em coortes e atribuir idades arbitrárias a cada uma delas. Como o comprimento de cada coorte também pode ser determinado, obteremos a combinação de dados de comprimento e idade que são necessários para determinar os parâmetros de crescimento usando os métodos descritos na Secção 3.3. Antes de entrar nos métodos específicos, será dada uma introdução rápida sobre a primeira aplicação conhecida destes métodos na Dinamarca e depois com um exemplo dos trópicos, ilustra-se as dificuldades inerentes a este tipo de análises.

#### Exemplo 8: Estimação de idades de espécies de águas temperadas

A idéia básica que fundamenta as técnicas descritas nesta secção remonta a um dos primeiros trabalhos em biologia pesqueira; uma publicação de Petersen (1892) sobre o Peixe-carneiro-europeu (*Zoarcetes viviparus*). Os comprimentos de 156 peixes estão representados por pontos na Fig. 3.4.0.1. Petersen dividiu os 156 peixes em juvenis, machos e fêmeas, além disso dividiu os peixes adultos em dois grupos de tamanho:

Tamanho médio : de 5 a 8 polegadas  
Tamanho grande: de 9 polegadas em diante



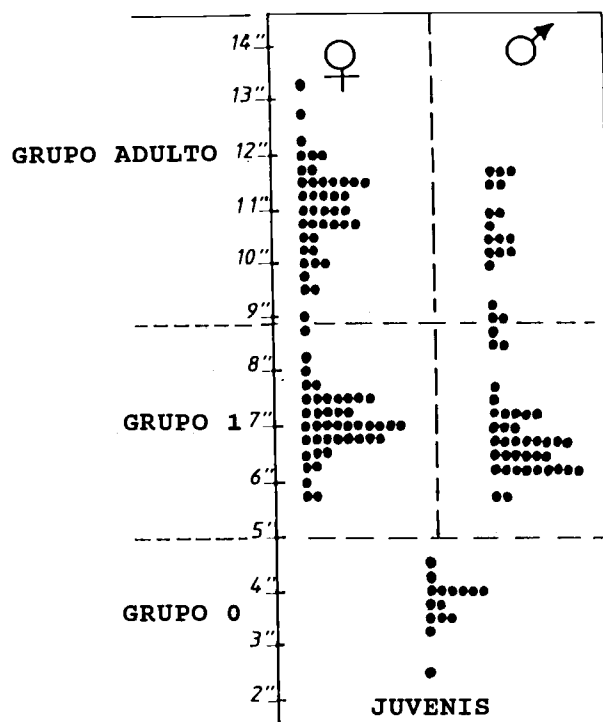


Fig. 3.4.0.1 Amostra de frequências de comprimento de 156 exemplares de (*Zoarces viviparus*) em unidades de polegadas dinamarquesas, recolhidas no Fiorde Holbaek (Dinamarca) 10-11 de Julho de 1890. (Adaptado de Petersen, 1892)

Petersen sabia, a partir de observações anteriores, que no inverno podiam ser capturados juvenis de 1.5 polegadas, enquanto no verão todos os juvenis tinham entre 3 a 5 polegadas. Dado que certos grupos, dependendo da estação, pareciam estar ausentes, o autor concluiu que os três grupos de comprimento na amostra de Julho poderiam ser interpretados como se segue:

- menor que 5" : grupo 0, nascido no inverno 1889/90
- entre 5" a 8" : grupo 1, nascido no inverno 1888/89
- de 9" em diante: grupo 2+, nascido no inverno 1887/88 ou antes

(O símbolo "2+" representa o "grupo 2, mais os grupos mais velhos". É chamado "grupo 2 mais").

Os estudos de Petersen indicaram que *Zoarces viviparus* reproduz-se uma vez por ano, durante um período restricto. Para a maioria das espécies de águas temperadas, a reprodução ocorre durante 2-4 meses no inverno ou na primavera.

Tal padrão reprodutivo torna relativamente fácil definir uma coorte. Em águas temperadas uma coorte é simplesmente uma classe anual de peixes. Como todos os peixes crescem aproximadamente a uma mesma taxa, uma coorte pode ser seguida durante a primeira parte de sua vida traçando-se os picos nas amostras de frequências de comprimento. Quando, porém, eles atingem o seu tamanho máximo, isto não é mais possível, porque peixes de diferentes idades alcançaram quase o mesmo tamanho.

**Exemplo 9: Estimação de idades da truta coral, uma espécie tropical**

Discutiremos agora uma análise similar com uma espécie de águas tropicais. A Fig. 3.4.0.2a apresenta uma amostra de frequências de comprimento da truta coral (*Plectropomus leopardus*) obtida por Goeden (1978), na Ilha Heron, Austrália. Este exemplo parece fácil de lidar. Existem quatro picos distintos (A,B,C e D) e é tentador interpretá-los como grupos de idade 1,2,3 e 4, como feito por Goeden. No entanto, uma observação mais cuidadosa mostra que esta interpretação não se conforma com o modelo de von Bertalanffy. Os comprimentos médios dos picos B, C e D são aproximadamente 35 cm, 42 cm e 50 cm, respectivamente. Quando os interpretamos como grupos de idade, as taxas de crescimento vem a ser:

$$\begin{aligned} \text{entre os picos B e C: } & (42-35)/1 = 7 \text{ cm/ano} \\ \text{entre os picos C e D: } & (50-42)/1 = 8 \text{ cm/ano} \end{aligned}$$

Isto não está de acordo com a curva de crescimento de von Bertalanffy, pois é esperado que a taxa de crescimento entre C e D seja menor que a esperada entre B e C. Assim, para dar uma interpretação de acordo com o modelo de von Bertalanffy, ao pico D deve-se atribuir uma idade dois anos mais velha que a do pico C, e deve-se assumir que existe um grupo etário adicional entre os picos C e D. Uma explicação provável é que os picos C e D representem classes mais fortes (grande número de indivíduos na coorte), enquanto a coorte representada por classes de comprimento entre os picos C e D provêm de uma classe anual pobre.

As pequenas barras sólidas, mostradas no eixo dos x da Fig. 3.4.0.2a, são os comprimentos na idade 1,2,...,7 correspondendo à curva de crescimento de von Bertalanffy com os parâmetros:

$$L_{\infty} = 57 \text{ cm, } K = 0.4 \text{ por ano e } t_0 = -0.5 \text{ ano}$$

**Tabela 3.4.0.1 Comprimentos por idades para escolhas alternativas dos parâmetros de crescimento. Os gráficos com as frequências observadas estão mostrados na Fig. 3.4.0.2 para as colunas a, b, e c**

	a *)	b	c	d	
idade	$L_{\infty}$	57.0	59.5	59.5	70.0
	$K$	0.40	0.40	0.34	0.21
	$t_0$	-0.50	-0.50	-0.65	-1.15
0	10.3	10.8	11.8	15.1	
1	25.7	26.8	25.5	25.5	
2	36.0	37.6	35.3	33.9	
3	42.9	44.8	42.3	40.8	
4	47.5	49.7	47.3	46.3	
5	50.7	52.9	50.8	50.8	
6	52.8	55.1	53.3	54.5	
7	54.2	56.5	55.1	57.4	

\*) Ver Tabela 3.1.0.1

Os comprimentos correspondentes às barras foram utilizados também na Tabela 3.1.0.1 e repetidos na coluna a da Tabela 3.4.0.1. Estes parâmetros interpretam os picos A,B,C e D como os grupos 1-, 2-, 3- e 5- respectivamente, e coloca o grupo 4 entre os picos C e D. Esta escolha especial dos parâmetros de crescimento não está baseada em quaisquer técnicas de ajustes, ou qualquer outro método racional. Eles foram derivados de uma curta série de tentativas com diferentes parâmetros, até à obtenção de uma curva, que coloca os comprimentos médios da coorte próximo dos picos, excepto para o grupo de idade 4.

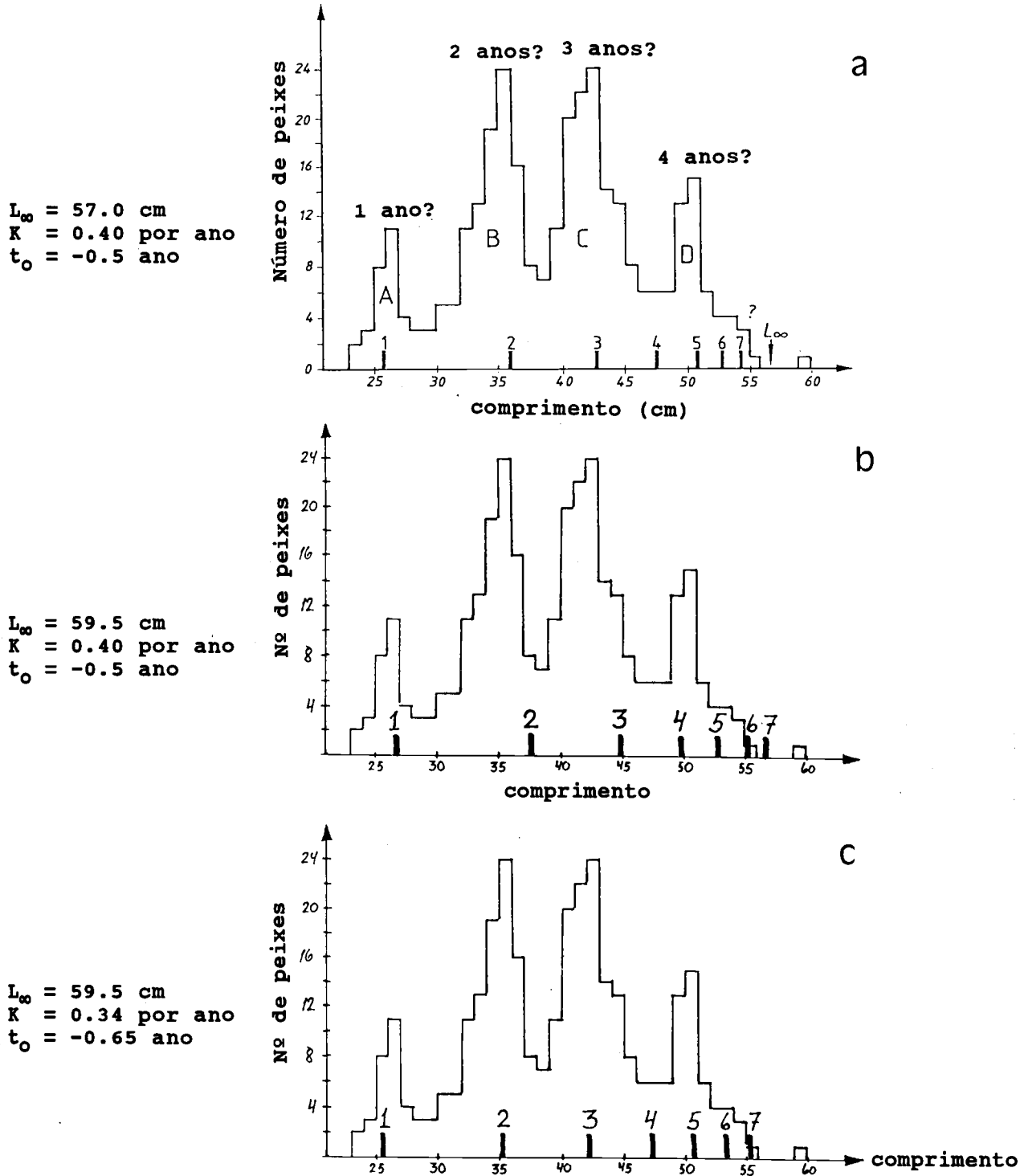


Fig. 3.4.0.2 Amostra de frequências de comprimento da truta coral (*Plectropomus leopardus*) Goeden (1978). As barras pequenas no eixo dos x indicam o comprimento nas idades correspondentes aos parâmetros de crescimento dados nas colunas a, b e c da Tabela 3.4.0.1

Note: H. Weng, Brisbane, Austrália, chamou a nossa atenção para o facto de que a truta coral (*Plectropomus leopardus*) muda de sexo, de masculino para feminino, quando atinge um comprimento de 30 a 35 cm. Este facto foi mencionado por Goeden (1978), mas foi ignorado por nós. Embora os resultados obtidos neste exemplo possam não ser "os reais", o exemplo continua a servir de ilustração do método.

Provavelmente, este não é o único conjunto de parâmetros de crescimento que produz uma curva de crescimento que apresenta uma certa correspondência com os picos da Fig. 3.4.0.2a. Pode-se, por exemplo, ter usado o comprimento maior, 59.5 cm, como a estimação de  $L_{\infty}$ . (Note que, considerando a definição de  $L_{\infty}$  como o comprimento médio de um peixe muito velho, geralmente não é correcto usar o maior peixe observado como uma estimação de  $L_{\infty}$ ). No entanto, neste caso com somente 312 peixes na amostra, o maior deles pode dar uma estimação razoável de  $L_{\infty}$ . Usando este  $L_{\infty} = 59.5$  cm, juntamente com o mesmo valor de  $K = 0.4$  e o mesmo valor  $t_0 = -0.5$ , obtém-se os comprimentos por idade mostradas na coluna b da Tabela 3.4.0.1. A Fig. 3.4.0.2b mostra os comprimentos médio correspondentes por idade, junto com a amostra de frequências de comprimento. É óbvio que esta escolha de parâmetros de crescimento produz um ajuste menos convincente dos picos do que aquele mostrado na Fig. 3.4.0.2a.

Reduzindo  $K$  a 0.34 e  $t_0$  a -0.65, ocorre uma concordância muito melhor entre picos e comprimentos médios, como mostra a Fig. 3.4.0.2c. Os correspondentes comprimentos médios por idade são dados na coluna c da Tabela 3.4.0.1. É difícil avaliar, somente por inspeção visual, se este ajuste é melhor que aquele mostrado na Fig. 3.4.0.2a.

Em geral, é difícil definir uma solução única para este tipo de problema. Valores diferentes (de  $L_{\infty}, K, t_0$ ) podem produzir curvas de crescimento muito semelhantes. Isto parece óbvio quando se observa que, para um dado valor de  $L_{\infty}$  pode-se sempre determinar os valores correspondentes dos outros parâmetros de crescimento,  $K$  e  $t_0$ , de modo que a curva passe através de dois pontos pré-especificados no sistema de coordenadas idade/comprimento.

Como exemplo, vamos dar a  $L_{\infty}$  um valor de 70 cm e determinar  $K$  e  $t_0$ , de modo que a curva, assim obtida, fique próxima à curva dada na coluna c da tabela 3.4.0.1. Fazemos isto seleccionando  $K$  e  $t_0$  de modo que o comprimento na idade  $t = 1$ ,  $L(1) = 25.5$  cm e  $L(5) = 50.8$  cm.

Da Eq. 3.3.3.1 as fórmulas para  $K$  e  $t_0$  podem ser derivadas como se segue:

$$-\ln\left(1 - \frac{L(t_1)}{L_{\infty}}\right) = -K*t_0 + K*t_1 \quad (a)$$

$$-\ln\left(1 - \frac{L(t_2)}{L_{\infty}}\right) = -K*t_0 + K*t_2 \quad (b)$$

subtraindo-se (b) de (a).

Como  $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ , após alguns rearranjos, obtemos

$$\ln \frac{L_{\infty} - L(t_1)}{L_{\infty} - L(t_2)} = K*(t_2 - t_1) \quad \text{ou}$$

$$K = \frac{1}{t_2 - t_1} * \ln \frac{L_{\infty} - L(t_1)}{L_{\infty} - L(t_2)} \quad (3.4.0.1)$$

A fórmula de  $t_0$  é obtida simplesmente rearranjando a Eq. 3.3.3.1. No caso de  $t = t_1$  teremos

$$t_0 = t_1 + \frac{1}{K} * \ln\left(1 - \frac{L(t_1)}{L_{\infty}}\right) \quad (3.4.0.2)$$

Assim, para  $t_1 = 1$  e  $t_2 = 5$  correspondente a  $L(1)$  e  $L(5)$  respectivamente, nós usamos:

$$K = \frac{1}{5-1} * \ln \frac{70.0-25.5}{70.0-50.8} = 0.21 \text{ por ano } e$$

$$t_o = 1 + \frac{1}{0.21} * \ln(1 - \frac{25.5}{70.0}) = -1.15 \text{ ano}$$

Estes parâmetros de crescimento produziram os comprimentos por idade na coluna d da Tabela 3.4.0.1. As duas curvas de crescimento correspondentes às colunas c e d da Tabela 3.4.0.1 são apresentadas na Fig. 3.4.0.3. Parece difícil decidir qual das duas curvas dá o melhor ajuste à amostra de frequências de comprimento na Fig. 3.4.0.2.

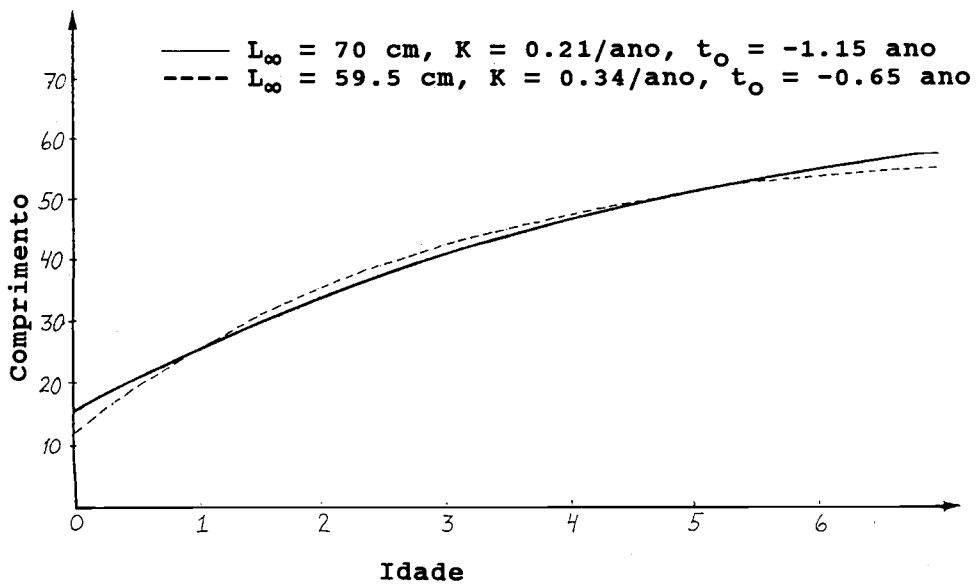


Fig. 3.4.0.3 Exemplo de duas curvas de crescimento que são aproximadamente iguais, mas têm parâmetros de crescimento bastante diferentes. Derivado das colunas c e d da Tabela 3.4.0.1

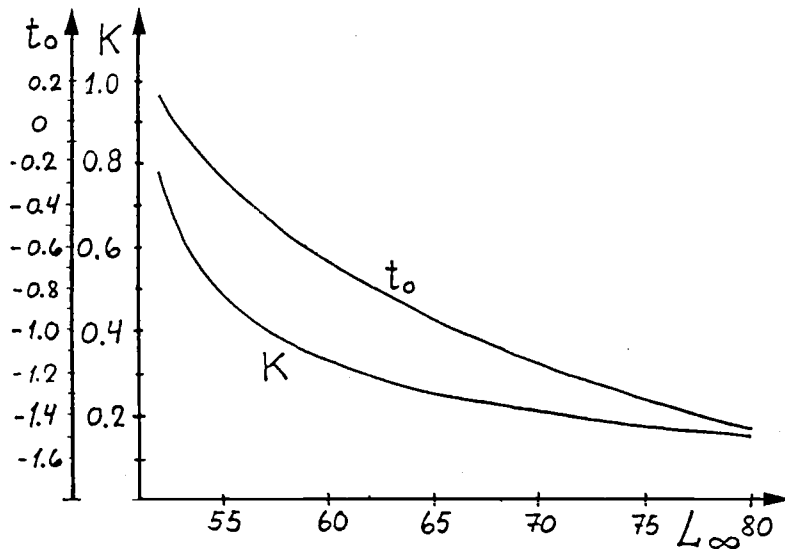


Fig. 3.4.0.4 Parâmetros de crescimento  $K$  e  $t_o$  como função de  $L_{\infty}$  para curvas de crescimento que preenchem a condição  $L(1) = 25.5 \text{ cm}$  e  $L(5) = 50.8 \text{ cm}$

É muitas vezes extremamente difícil obter uma interpretação não ambígua de um conjunto de dados de frequências de comprimento de peixes tropicais, em particular quando se dispõe apenas de uma amostra complexa de frequências de comprimento e não de uma série temporal (ver Venema, Christensen e Pauly, 1988). Informações adicionais sobre a biologia da espécie em questão, podem ajudar bastante à correcta interpretação dos dados.

A interrelação entre os parâmetros de crescimento  $L_{\infty}$ ,  $K$  e  $t_0$  é melhor demonstrada na Fig. 3.4.0.4 que mostra  $K$  e  $t_0$  em função de  $L_{\infty}$  para curvas de crescimento que preenchem a condição  $L(1) = 25.5$  cm e  $L(5) = 50.8$  cm. Note que  $K$  e  $t_0$  diminuem à medida que  $L_{\infty}$  aumenta. Assim, quando se comparar diferentes estimações de  $K$ ,  $L_{\infty}$  e  $t_0$ , a comparação não deve ser feita com o parâmetro individual, mas com base nas curvas de crescimento resultantes. No exemplo das colunas c e d na Tabela 3.4.0.1, diríamos que os dois conjuntos de parâmetros:

$$(L_{\infty}, K, t_0) = (59.5, 0.34, -0.65) \text{ e}$$

$$(L_{\infty}, K, t_0) = (70.0, 0.21, -1.15)$$

são aproximadamente iguais no sentido em que eles produzem quase as mesmas curvas dentro da amplitude de idades consideradas.

Quanto mais peixes velhos existirem na amostra, melhor a estimacão de  $L_{\infty}$  e a estimacão de  $K$  torna-se menos dependente da estimacão de  $L_{\infty}$ .

A discussão acima leva a um aviso: não considerar que as estimacões dos parâmetros de crescimento estejam sempre relacionadas directamente com a fisiologia dos peixes. Somente quando a amostra for grande e não viciada, pode-se esperar que os parâmetros estimados reflectam a sua interpretação fisiológica.

### **Comparação de curvas de crescimento**

O parâmetro de crescimento  $K$  está relacionado com a taxa metabólica dos peixes. Peixes pelágicos são quase sempre sempre mais activos do que demersais, tendo um  $K$  maior. A taxa metabólica é também uma função da temperatura: peixes tropicais têm um  $K$  maior do que peixes de água fria. Esta relação é mascarada pela correlação de  $K$  com  $L_{\infty}$  nas espécies pequenas, uma vez que estas têm valores de  $K$  maiores do que espécies grandes no mesmo nível de actividade. Outra complicação advém da correlação do  $K$  e do  $L_{\infty}$  descrita abaixo: diferentes combinações de  $K$  e de  $L_{\infty}$  dão o mesmo ajuste, excepto quando uma ampla gama de idades é representada. Um alto valor de  $K$  pode combinar com um baixo valor de  $L_{\infty}$  e vice versa. Estes dois tipos de correlações estão misturados na literatura, no entanto vamos olhar para eles separadamente.

### **Correlação estatística de $K$ e $L_{\infty}$ dentro da mesma espécie**

Em várias amostras quando se determina a média de comprimentos de vários grupos de idade, é normal existir uma variância. No entanto não é surpreendente que duas amostras da mesma população obtenham médias de comprimentos diferindo por exemplo de 0.5 cm. Veremos o que acontece ao  $K$  e  $L_{\infty}$  estimados quando o comprimento à idade é alterado por este valor. A Coluna B da Tabela 3.4.0.2 mostra-nos comprimentos às idades de 1 - 5 anos de peixes com um  $L_{\infty} = 60$  cm,  $K = 0.24$  e  $t_0 = 0$ . Os incrementos de cada classe estão calculados na coluna C e  $L_{\infty}$  e  $K$  foram estimados a partir destes dados pelo método de Chapman (Secção 3.3.2). As diferenças dos valores reais são devido aos erros de arredondamento. A coluna D dá-nos o comprimento com 0.5 cm adicionado e subtraído, alternadamente, tal como indicado pelas setas. O valor de  $L_{\infty}$  subsequente é maior e o de  $K$  é menor. Na coluna F os comprimentos originais

são alterados novamente em 0.5 cm, mas em sentido contrário, resultando um  $L_{\infty}$  menor e K maior.

Temos agora três estimativas de  $L_{\infty}$  e K, assumindo que se basearam em três amostras da mesma população. Ajustando a equação

$$\ln K = a + b \cdot \ln L_{\infty}$$

às três "observações" de  $L_{\infty}$  e K resulta

$$\ln K = 6.67 - 1.98 \cdot \ln L_{\infty}$$

A estimativa do declive de cerca de -2 não é de confiança uma vez que resulta de um numero pequeno de dados. No entanto Pauly (1979) fez uma estimativa similar para mais de 100 espécies de peixes no qual pelo menos três pares de  $L_{\infty}$  e K foram publicados. O autor calculou o declive para cada espécie, calculou a sua média e determinou uma média extremamente perto de -2. Nesta estimativa, foi utilizado  $W_{\infty}$  em vez de  $L_{\infty}$  assumindo que  $W_{\infty} = q \cdot L_{\infty}^3$ , e também logaritmos com base 10, uma vez que não altera o declive. Pauly determinou

$$\log K = \phi - 0.67 \cdot \log W_{\infty} \quad (3.4.0.5)$$

$$\log K = \phi' - 2 \cdot \log L_{\infty} \quad (3.4.0.6)$$

no qual

$$\phi' = \phi - 0.67 \cdot \log q \quad (3.4.0.7)$$

$\phi$  e particularmente  $\phi'$  (phi-linha) são utilizados mais frequentemente uma vez que provavelmente são a melhor maneira de calcular a média dos parâmetros de crescimento de uma espécie em particular.  $\phi'$  é calculado para cada grupo de dados e determinado a sua média. Inserindo por exemplo, na Eq. 3.4.0.6, o valor de  $L_{\infty}$ , a média de todas as estimativas dá um valor de K correspondente ao  $L_{\infty}$  inserido. Sempre que  $L_{\infty}$  e K forem estimados de um novo grupo de dados para a mesma espécie, um calculo de  $\phi'$  indica se o novo par de  $L_{\infty}$  e K estão de acordo com os resultados anteriores. O novo  $\phi'$  deve ser semelhante ao anterior, uma vez que  $\phi'$  é a constante na regressão de  $\log K - \log L_{\infty}$ . Se for bastante diferente há uma razão para se suspeitar da fidelidade da nova estimativa de K e  $L_{\infty}$ .

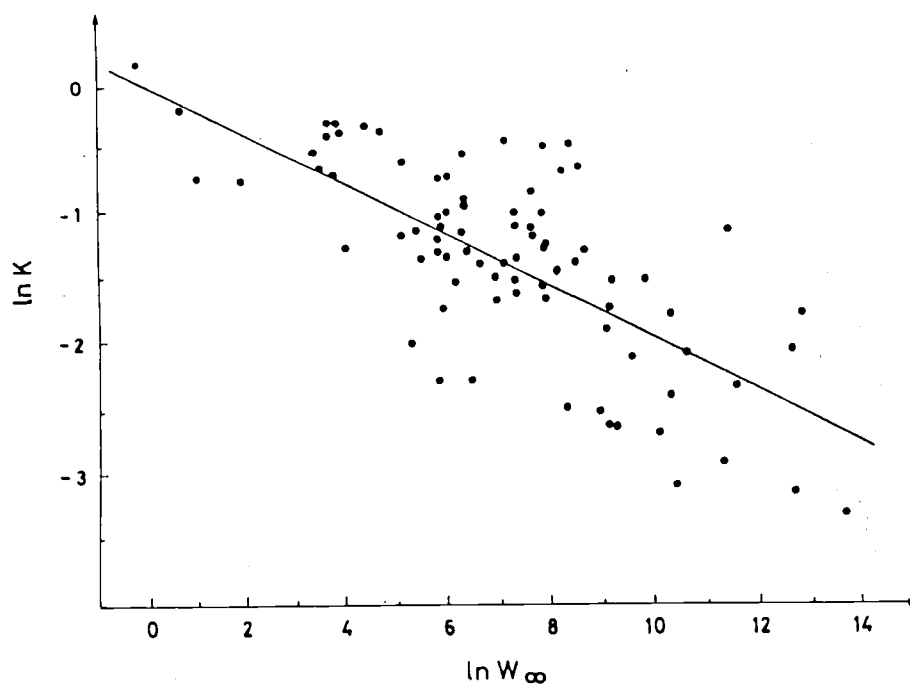
**Table 3.4.0.2** O efeito de inadequada determinação do comprimento médio à idade sobre a estimativa de K e  $L_{\infty}$ . As setas indicam se o verdadeiro comprimento foi mudado para cima ou para baixo

A	B	C	D	E	F	G
			comprimento médio alterado 0.5 cm			
idade anos	comprim. médio cm	$L(t+1) - L(t)$	1ª alteração		2ª alteração	
t	L	$\Delta L$	L	$\Delta L$	L	$\Delta L$
1	12.80	10.07	↑ 13.20	9.17	↓ 12.30	11.07
2	22.87	7.92	↓ 22.37	8.92	↑ 23.37	6.92
3	30.79	6.24	↑ 31.29	5.24	↓ 30.29	7.24
4	37.03	4.90	↓ 36.53	5.90	↑ 37.53	3.90
5	41.93	-	↑ 42.43	-	↓ 41.43	-
$L_{\infty}$	60.16		67.46		53.82	
K	0.2392		0.1931		0.3018	
$\ln K = 6.6731 - 1.976 \ln L_{\infty}$						

Os dados de Pauly incluem não só a correlação estatística ilustrada na Tabela 3.4.0.2, mas também as diferenças reais entre anos e locais, talvez principalmente causadas pelas diferenças de temperatura e disponibilidade de alimento. Quando as diferenças nas curvas de crescimento são provocadas por condições ambientais, a relação existente entre  $L_{\infty}$  e  $K$  pode ser investigada utilizando  $\phi'$ . Para reduzir ou eliminar os efeitos da correlação estatística na estimativa de cada condição ambiental deve-se combinar vários pares de  $L_{\infty}$  e  $K$ .

### *Correlação inter-específica de $K$ e do comprimento assintótico*

A determinação da correlação de  $K$  e do comprimento assintótico entre espécies requer dados de espécies de comprimentos bastante diferentes, senão o efeito da estatística e do ambiente, discutido acima, pode interferir com a análise. Caso a espécie em estudo não tenha praticamente a mesma forma, i.e. com o mesmo  $q$ , deve-se utilizar  $W_{\infty}$ .



**Fig. 3.4.0.6** Relação entre  $K$  e  $W_{\infty}$  em 81 espécies de peixes variando entre  $W_{\infty} = 0.8$  g e  $W_{\infty} = 852$  kg. Adaptado de Ursin (1968)

Fig. 3.4.0.6 mostra  $\ln K$  graficado contra  $\ln W_{\infty}$  para 81 espécies de peixes, no qual  $W_{\infty}$  estimados variam entre 0.8 g e 852 kg. A relação é

$$\ln K = 0.071 - 0.200 \cdot \ln W_{\infty}$$

O declive é cerca de um terço daquele encontrado para a correlação estatística dentro da mesma espécie, Eq. 3.4.0.5. A estimativa tem uma variância alta devido a peixes de diferentes níveis metabólicos serem incluídos na análise, ou seja, os peixes pelágicos com uma alta taxa metabólica são os responsáveis pela maior parte dos pontos acima da recta da Fig. 3.4.0.6. Os peixes demersais e das águas frias de profundidade explicam muitos dos pontos abaixo da recta.



Análises por famílias individuais reduzem a variância, uma vez que a maior parte ou são predominantemente pelágicas ou predominantemente demersais. A Fig. 3.4.0.7 dá um exemplo para os Scombridae (cavala e atuns) onde também se insere a regressão linear da Fig. 3.4.0.6.

A relação descrita pode ser escrita deste modo

$$\ln K = \ln KO - KS \cdot \ln W_{\infty}$$

ou

$$K = KO \cdot W_{\infty}^{-KS} \quad (3.4.0.8)$$

no qual  $\ln KO$  é comparável ao  $\phi$  da correlação para uma espécie, Eq. 3.4.0.5. Do  $KO$  estimado é usado

$$\ln KO = \ln K + KS \cdot \ln W_{\infty}$$

ou

$$KO = K \cdot W_{\infty}^{KS} \quad (3.4.0.9)$$

$KO$  é um índice da taxa metabólica de um peixe que nada normalmente, mas que não se alimentou recentemente (Ursin, 1968). A taxa metabólica pode ser expressa por exemplo pelo consumo de oxigénio ou pela perda de peso durante períodos de fome.  $KO$  é independente do tamanho da espécie, ou seja graficando  $\ln KO$  contra  $\ln W_{\infty}$  resulta uma regressão linear de declive zero, ao passo que graficando  $\phi$  ou  $\phi'$  contra  $\ln W_{\infty}$  (ou  $\log W_{\infty}$ ) obtem-se um declive abrupto, tal como está ilustrado na Fig. 3.4.0.8.

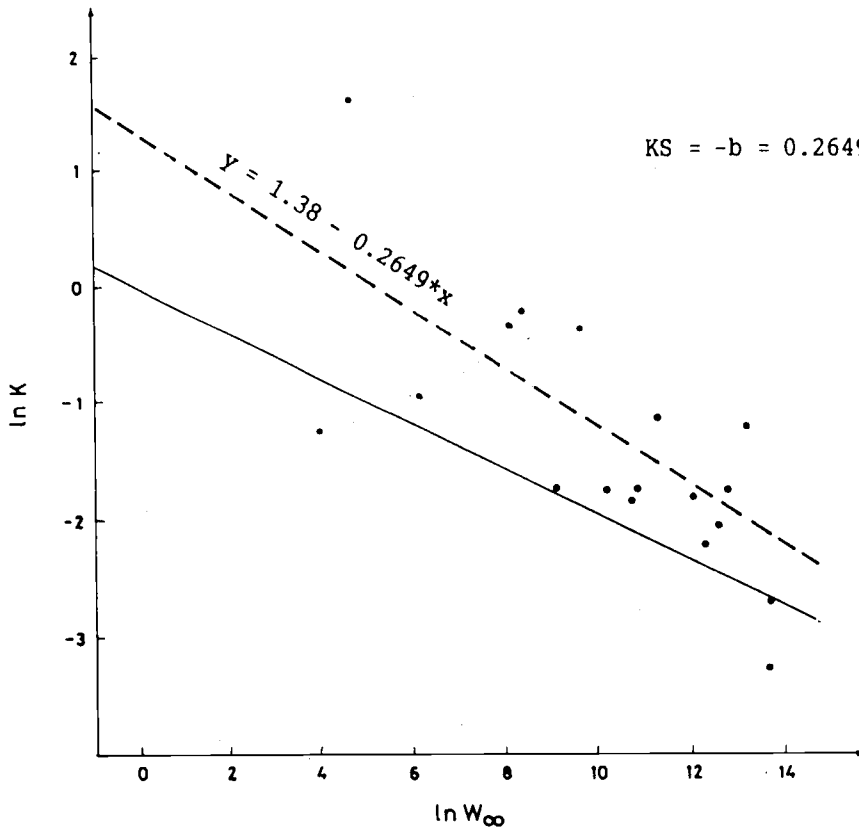


Fig. 3.4.0.7 Valor de  $K$  alto para espécies pelágicas: Scombridae A recta de regressão da Fig.3.4.0.6 (a cheio), conjuntamente com a recta de regressão para os Scombridae (ponteados). Dados na Tabela 3.4.0.3

A Fig. 3.4.0.7 mostra o gráfico de  $\ln K$  contra  $\ln W_{\infty}$  para várias espécies da família Scombridae. O declive da recta referente aos pontos é  $-0.26$  (a ponteados), o valor de  $KS$  correspondente é  $0.26$ . Este resultado conjuntamente com o de mais quatro famílias está listado na Tabela 3.4.0.3. O valor médio de  $KS$  é  $0.22$ , que é um terço do valor ( $0.67$ ) do declive da fórmula de  $\phi$  de Pauly da Eq. 3.4.0.5.

**Table 3.4.0.3** Parâmetros estimados da Eq. 3.4.0.9 para cinco famílias. Dados de Ursin, 1968, Pauly, 1980b, e Munro, 1983a

família	nº de pares de $K$ e $W_{\infty}$	- declive KS	média de $\ln KO$	índice metabólico médio KO
Myctophidae	5	0.28	-0.21	0.81
Pleuronectidae	7	0.17	0.31	1.36
Gadidae	12	0.21	0.34	1.40
Scombridae	18	0.26	1.01	2.75
Serranidae	19	0.20	0.31	1.36
média		0.22		

O índice metabólico médio  $KO$  para estas cinco famílias varia desde  $0.81$  para os peixes mesopelágicos pertencentes à família Myctophidae a  $2.75$  nos epipelágicos da família Scombridae.

$KO$  é útil para se ter uma primeira estimativa da curva de crescimento para uma espécie que ainda não está bem estudada.  $W_{\infty}$  pode ser pressuposto a partir do tamanho do maior peixe da captura, enquanto  $K$  é determinado a partir da Eq. 3.4.0.8 usando o  $KO$  médio estimado para a família e o  $KS$  total de todas as famílias juntas ( $KS = 0.22$  na Tabela 3.4.0.3).

Como exemplo, considere uma espécie da família Serranidae no qual  $q = 0.02$  e  $L_{\infty}$  é pressuposto ser  $30$  cm.  $W_{\infty}$  é então  $0.02 \cdot 30^3 = 540$  g, que conjuntamente com  $KS = 0.22$  e  $KO = 1.36$  (ver Tabela 3.4.0.3) dá

$$K = 1.36 * 540^{-0.22} = 0.34$$

Tal como na fórmula de  $\phi$ , a Eq. 3.4.0.8 pode ser modificada numa função de  $L_{\infty}$  através da inserção de  $W_{\infty} = q \cdot L^3$ , que dá

$$\ln K = \ln KO' - 3 \cdot KS \cdot \ln L_{\infty} \quad (3.4.0.10)$$

onde

$$\ln KO' = \ln KO - KS \cdot \ln q \quad (3.4.0.11)$$

Aqui, tal como  $\phi'$ ,  $\ln KO'$  é uma função de  $q$  e portanto depende da forma do peixe. Ao passo que  $\phi'$  é usado para uma só espécie, e conseqüentemente com  $q$  constante ou quase constante,  $KO$  e  $KO'$  são usados para comparar entre espécies diferentes onde  $q$  frequentemente é variável. No caso em que  $q$  não é constante deve ser utilizada a Eq. 3.4.0.8.

Para realçar as diferentes utilizações de  $\phi$  (para mananciais da mesma espécie) e  $KO$  (para espécies da mesma família) considere a Fig. 3.4.0.8 no qual  $\phi$  e  $\log KO$  estão graficados contra  $\log W_{\infty}$ . (é usado logaritmos na base 10 devido a  $\phi$  ser assim definido).

Para  $\log KO$  o declive é zero, devido a  $KO$  ser independente do tamanho da espécie, ao passo que  $\phi$  tem um declive de  $0.47$ . Isto é, aproximadamente a diferença entre o declive  $0.67$  da equação de  $\phi$  (Eq. 3.4.0.5) e o declive da equação de  $KO$ ,  $KS = 0.22$  (Eq. 3.4.0.8 e Tabela 3.4.0.3).

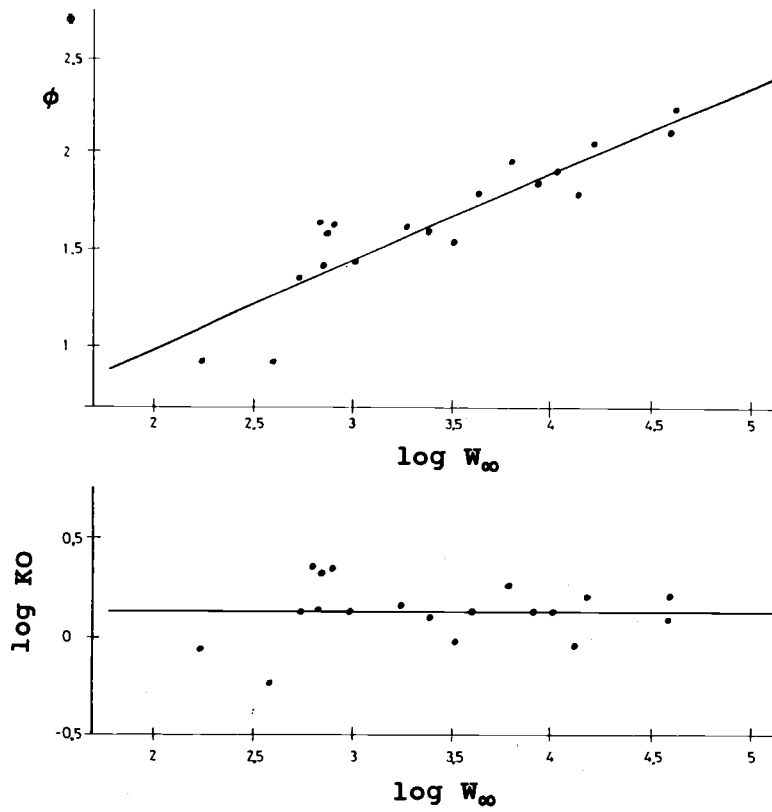


Fig. 3.4.0.8 Gráfico de  $\phi$  (topo) e  $\log KO$  (baixo) contra  $\log W_{\infty}$  para os Serranidae. Dados de Munro, 1983

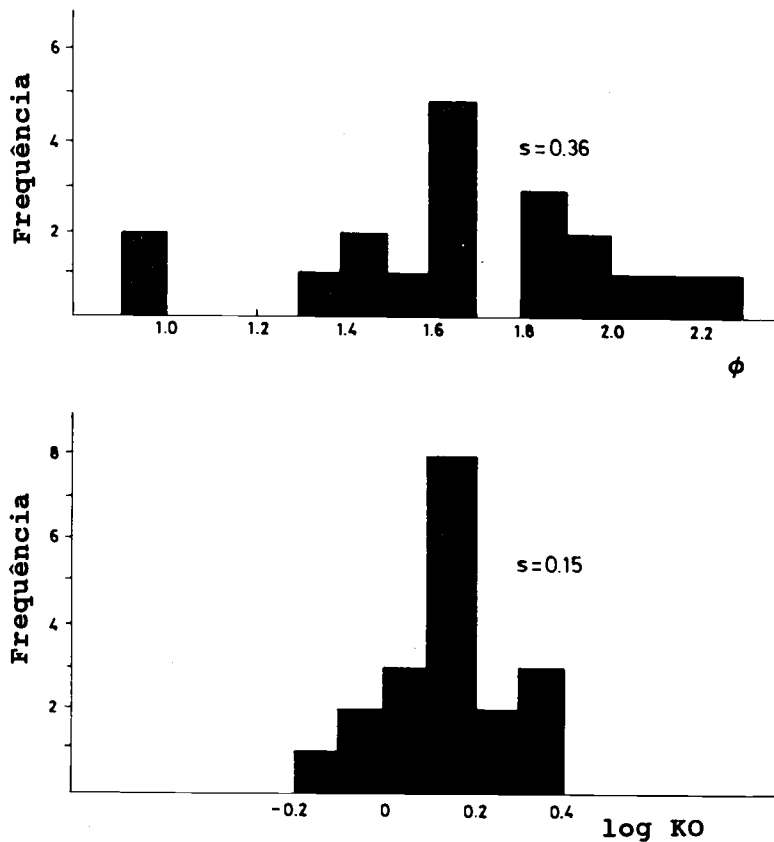


Fig. 3.4.0.9 Distribuições de frequência dos  $\phi$  estimados (baixo) e de  $\log KO$  (topo) para espécie de Serranidae, cf. Fig. 3.4.0.8

O desvio padrão da recta de regressão  $\phi$  na Fig. 3.4.0.8 (topo) e da recta de log KO (Fig. 3.4.0.8,baixo) é o mesmo. No entanto, quando a relação linear com o log  $W_{\infty}$  é ignorada, a distribuição completa de  $\phi$  tem um desvio padrão maior, ver Fig. 3.4.0.9 (baixo).

Alguns autores têm publicado histogramas da distribuição  $\phi$  para determinadas famílias, similares ao da Fig. 3.4.0.9 (baixo). Nesses histogramas é esperado que os valores baixos representem pequenas espécies e os valores altos, espécie grandes.

### 3.4.1 Método de Bhattacharya

Na Secção 2.2 foram introduzidas várias formas de representação gráfica de uma distribuição normal. Uma delas é o método de Bhattacharya (1967), que é útil para separar uma distribuição composta em distribuições normais separadas, isto é, quando vários grupos etários (coortes) de peixes estão contidos na mesma amostra. Este método será discutido em pormenor com base no exemplo hipotético da Tabela 3.2.1.1. Neste caso, conhecemos a solução: o conjunto de distribuições normais do qual o total é composto, e é possível, portanto, verificar a validade do resultado da análise.

#### Bases do cálculo matemático do método de Bhattacharya

O método de Bhattacharya consiste basicamente na separação de distribuições normais, cada uma representando uma coorte de peixes da distribuição global, começando do lado esquerdo da distribuição total. Uma vez que a primeira distribuição normal tenha sido determinada, ela é removida da distribuição total, e o mesmo procedimento é repetido quantas vezes for possível separar distribuições normais da distribuição total. Todo o processo pode ser dividido nas seguintes etapas:

- Etapa 1:** Determinar a inclinação não contaminada (limpa) da distribuição normal do lado esquerdo da distribuição total.
- Etapa 2:** Determinar a distribuição normal da primeira coorte por transformação em uma linha recta.
- Etapa 3:** Determinar o número de peixes por classe de comprimento pertencentes à primeira coorte, e depois subtrair da distribuição total.
- Etapa 4:** Repetir os processos para a próxima distribuição normal à direita, até não se encontrar mais distribuições normais limpas.
- Etapa 5:** Relacionar os comprimentos médios das coortes, determinadas nas etapas 1 a 4, à diferença de idades entre as coortes.

Como já mostrado na Secção 2.6, uma distribuição normal é transformada numa recta quando: 1) os números são substituídos pelos seus logaritmos e 2) as diferenças são calculadas entre valores logarítmicos consecutivos. Seja  $N$  o número de indivíduos numa dada classe de comprimento:

$$[x - dL/2, x + dL/2]$$

onde  $dL$  é o tamanho do intervalo,  $x$  o ponto médio do intervalo,  $x - dL/2$  é o limite inferior e  $x + dL/2$  o limite superior do intervalo.

Se uma certa amplitude de comprimentos na amostra contém uma só coorte, esta parte da amostra de frequências ajusta-se a uma distribuição normal (por exemplo, de 10 cm a 21 cm na amostra mostrada na Fig. 3.2.2.2). Neste caso a relação linear (ver Eq. 2.6.5):

$$\Delta \ln N = a + b*(x + dL/2)$$

seria a diferença logaritmo do número em uma certa classe de comprimento e o logaritmo do número na classe precedente, ou seja:

$$\Delta \ln N = \ln N(x + dL/2, x + 3dL/2) - \ln N(x - dL/2, x + dL/2)$$

como variável dependente  $y$ , e o limite superior da classe de menor comprimento:

$$x + dL/2$$

como variável independente  $x$  (compare Figs. 2.6.4 e 2.6.5).

Lembre-se de que o desvio padrão da distribuição normal e a média são obtidas por:

$$s = \sqrt{-dL/b} \quad e \quad \bar{x} = -a/b \quad (\text{compare Eqs. 2.6.6 e 2.6.7})$$

### **Exemplo 10: Análise de Bhattacharya para um conjunto de dados hipotéticos**

O cálculo relativo aos passos 1 a 5 na secção prévia, serão ilustrados abaixo considerando o conjunto de dados apresentados anteriormente na Tabela 3.2.1.1 e a representação gráfica da Fig. 3.2.2.1. Esse conjunto de dados foi obtido a partir de 6 componentes distribuídas como uma normal, conforme mostrado na Fig. 3.2.2.2.

Iremos agora tentar usar o método de Bhattacharya para analisar a coluna "total" da Tabela 3.2.1.1, tentando desmembrá-la nas seis componentes a partir das quais ela foi composta. A vantagem de usar um conjunto de dados obtido a partir de grupos hipoteticamente elaborados é que permite uma comparação dos resultados obtidos pelo método de Bhattacharya, com os dados exactos de entrada. As possibilidades e limitações do método podem, assim, ser melhor ilustrados. Os cálculos matemáticos serão seguidos passo a passo em termos gerais, com exemplos ilustrativos tirados do conjunto de dados da Tabela 3.2.1.1. A não ser que seja indicado de outra forma, os exemplos referem-se à Tabela 3.4.1.1., que é a primeira de uma série de folhas de exercícios.

**Passo 1:** Criar uma folha de cálculo como a Tabela 3.4.1.1 e completar a coluna A (as classes de comprimento) e a coluna B (as correspondentes frequências do conjunto de dados disponíveis).

Exemplo: As colunas A e B da Tabela 3.4.1.1, foram tiradas da Tabela 3.2.1.1. A coluna B é rotulada "N1+", porque contém a distribuição da primeira coorte (N1) mais todas as outras coortes. Em geral, o símbolo "Na+" representa a a-ésima coorte mais as coortes mais velhas.

**Passo 2:** Construir a coluna C obtendo o logaritmo de N1+ (coluna B)

$$\begin{aligned} \text{Exemplos: } \ln 1 &= 0 \\ \ln 4 &= 1.386 \end{aligned}$$

**Passo 3:** A coluna D contém as diferenças entre os logaritmos de duas frequências adjacentes

$$\Delta \ln N1+ = \ln N1+ \text{ da linha corrente menos} \\ \ln N1+ \text{ da linha anterior}$$

Completar a coluna D. Começar na segunda linha. Subtrair o primeiro valor do ln da coluna C do da segunda linha, da mesma coluna C, e colocar na segunda linha da coluna D. A primeira linha da coluna D fica vazia já que não existe a diferença entre

**Tabela 3.4.1.1 Método de Bhattacharya: estimação da primeira coorte, N1 (coorte da primavera de 1983). # nas colunas B, C, G e H indica onde começar os cálculos de N1 (ver Fig. 3.4.1.2). A coluna I contém o restante da amostra (N1+ - N1 = N2+)**

A	B	C	D	E	F	G	H	I
L1-L2	N1+	ln N1+	$\Delta \ln N1+$ (y)	L (x)	$\Delta \ln N1$	ln N1	N1	N2+
12-13	1	0.000	-	-	-	-	1	0
13-14	4	1.386	1.386	13*	1.375	-	4	0
14-15	11	2.398	1.012	14*	1.059	-	11	0
15-16	24	3.178	0.780	15*	0.743	-	24	0
16-17	38#	3.638#	0.460	16*	0.427	3.638#	38#	0
17-18	42	3.738	0.100	17*	0.111	3.749	(42.48)	(-0.48)
18-19	33	3.497	-0.241	18*	-0.205	3.545	(34.61)	(-1.61)
19-20	20	2.996	-0.501	19*	-0.521	3.023	(20.55)	(-0.55)
20-21	7	1.946	-1.050	20	-0.837	2.186	(8.90)	(-1.90)
21-22	3	1.099	-0.847	21	-1.153	1.033	2.81	0.19
22-23	3	1.099	0.000	22	-1.469	-0.436	0.65	2.35
23-24	5	1.609	0.511	23	-1.785	-2.211	0.11	4.89
24-25	8	2.079	0.470	24	-	-	-	8
25-26	11	2.398	0.318	25	-	-	-	11
26-27	14	2.639	0.241	26	-	-	-	14
27-28	17	2.833	0.194	27	-	-	-	17
28-29	16	2.773	-0.060	28	-	-	-	16
29-30	15	2.708	-0.065	29	-	-	-	15
30-31	14	2.639	-0.069	30	-	-	-	14
31-32	11	2.398	-0.241	31	-	-	-	11
32-33	11	2.398	0.000	32	-	-	-	11
33-34	10	2.303	-0.095	33	-	-	-	10
34-35	9	2.197	-0.106	34	-	-	-	9
35-36	10	2.303	0.106	35	-	-	-	10
36-37	11	2.398	0.095	36	-	-	-	11
37-38	10	2.303	-0.095	37	-	-	-	10
38-39	10	2.303	0.000	38	-	-	-	10
39-40	11	2.398	0.095	39	-	-	-	11
40-41	11	2.398	0.000	40	-	-	-	11
41-42	9	2.197	-0.201	41	-	-	-	9
42-43	7	1.946	-0.251	42	-	-	-	7
43-44	7	1.946	0.000	43	-	-	-	7
44-45	5	1.609	-0.337	44	-	-	-	5
45-46	6	1.792	0.183	45	-	-	-	6
46-47	5	1.609	-0.183	46	-	-	-	5
47-48	3	1.099	-0.510	47	-	-	-	3
48-49	2	0.693	-0.406	48	-	-	-	2
49-50	2	0.693	0.000	49	-	-	-	2
50-51	2	0.693	0.000	50	-	-	-	2
51-52	1	0.000	-0.693	51	-	-	-	1

Intervalo de classe, dL = 1. Número total na coorte N1: 183.57

\*) Pontos usados na análise de regressão, com resultados:

$$a = 5.4834, \quad b = -0.3160, \quad \bar{L}(N1) = -a/b = 17.35,$$

$$s(N1) = \sqrt{-dL/b} = 1.78$$

o primeiro ponto e um ponto anterior. Ter cuidado para usar pelo menos três casas decimais. Continuar determinando a diferença ( $\Delta \ln$ ) entre a terceira e a segunda linha, etc.

Exemplo:

A	B	C	D	E
L1-L2	N1+	$\ln N1+$	$\Delta \ln N1+$	L
12-13	1	0	-	
13-14	4	1.386	$1.386 - 0 = 1.386$	13
14-15	11	2.398	$2.398 - 1.386 = 1.012$	14

**Passo 4:** Completar a coluna E. Lembre-se da Secção 2.6 que  $\Delta \ln N1+$  deve ser marcado contra o limite superior da menor classe de comprimento entre as duas utilizadas, cuja diferença ( $\Delta \ln N1+$ ) é calculada. Inserir o centro da classe, ou o limite superior da menor das duas classes, ou o limite inferior da maior das duas classes, no mesmo nível da correspondente  $\Delta \ln N$ .

Ver exemplo no Passo 3.

**Passo 5:** Fazer um gráfico de todos os comprimentos (coluna E, no eixo dos x) contra  $\Delta \ln N1+$  (coluna D no eixo dos y).

Exemplo: Fig. 3.4.1.1

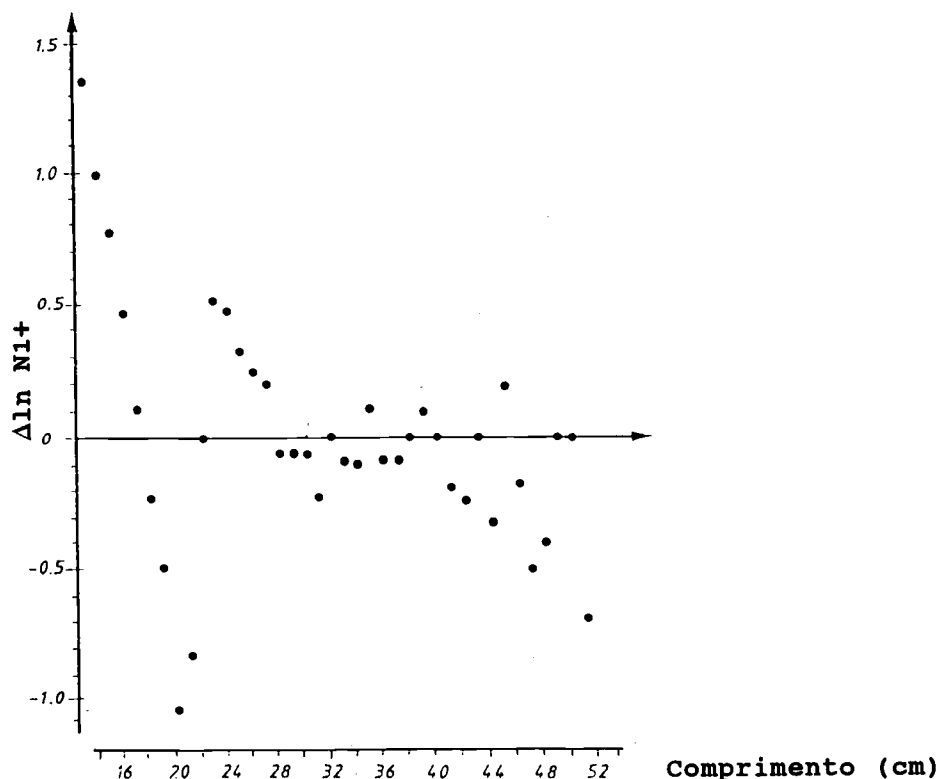


Fig. 3.4.1.1 Método de Bhattacharya: gráfico correspondente às colunas D (eixo dos y) e E (eixo dos x) da Tabela 3.4.1.1

**Passo 6:** Examinar o gráfico e determinar que pontos caem na recta. Marcar estes pontos na coluna E. Não incluir pontos que possam ser afectados pela próxima distribuição. Quanto mais os pontos tendem para a direita, maiores as probabilidades de serem influenciados pela próxima distribuição.

Exemplo: A Fig. 3.4.1.1 mostra que uma linha recta pode ser ajustada aos primeiros sete pontos (indicados por "\*" na Tabela 3.4.1.1). O oitavo ponto também poderia ser incluído na mesma recta, mas foi excluído dos cálculos subsequentes, pois pode estar influenciado pela próxima distribuição.

Esta recta corresponde à primeira componente normalmente distribuída, N1, que é interpretada como a coorte de primavera de 1983. O facto da recta correspondente a N1 ser identificada tão facilmente não surpreende, pois a primeira componente tem muito pouca sobreposição com a próxima, conforme se observa nas Figs. 3.2.2.1 e 3.2.2.2.

**Passo 7:** Calcular a recta que se ajustou, através da regressão da coluna E contra a coluna D para os pontos seleccionados (com asteriscos). Determinar a (intersecção) e b (declive) e calcular o comprimento médio:

$$\bar{L}(N1) = -a/b \text{ e o desvio padrão } s(N1) = \sqrt{-1/b}$$

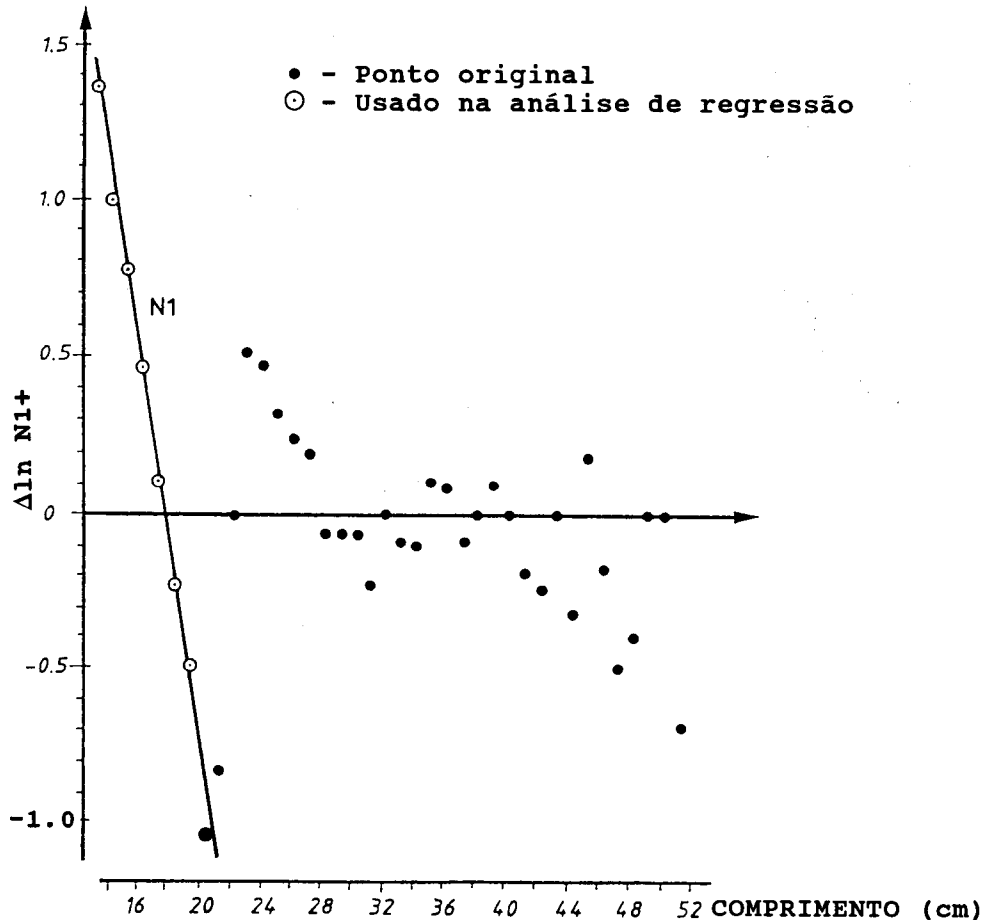
Exemplo:  $y = a + b \cdot x$

onde  $y = \Delta \ln N1+$  (na coluna D) e  $x = L$  (na coluna E)

a (intersecção) = 5.4834, b (declive) = -0.3160

$$\bar{L}(N1) = -a/b = 17.35 \text{ cm e } s(N1) = \sqrt{-1/b} = 1.78$$

A recta de regressão é mostrada na Fig. 3.4.1.2



**Fig. 3.4.1.2** Método de Bhattacharya: recta de regressão estimada para a primeira coorte (compare com as colunas D e E da Tabela 3.4.1.1)



Determinámos assim a recta que representa a distribuição normal que deve corresponder, em grande parte, ao lado esquerdo da distribuição de frequências de nossa amostra. A recta deverá representar a primeira coorte, N1. Para determinar a validade, calculamos, inicialmente, os valores teóricos da  $\Delta \ln N_1$ , correspondente à recta que acabámos de determinar. Fazemos então, o processo inverso e convertemos as diferenças ( $\Delta \ln N_1$ ) em  $\ln N_1$  e depois em números (N1). Este processo é ilustrado nas colunas F, G e H da Tabela 3.4.1.1.

A segunda parte do processo de cálculo consiste nos seguintes passos:

**Passo 8:** A fórmula  $\Delta \ln N = a + bL$  pode ser usada para calcular o valor teórico de  $\Delta \ln N_1$ . Isto é feito para tantas classes de comprimento quantas se encontrar na primeira coorte (distribuição normal).

Exemplo:  $\Delta \ln N_1$  para a classe de 12-13 e 13-14, com o ponto central da classe 13, é determinado de

$$a + b \cdot 13 = 5.4834 - 0.3160 \cdot 13 = 1.375$$

que é o primeiro valor na coluna F, o próximo valor é

$$a + b \cdot 14 = 1.059, \text{ etc.}$$

**Passo 9:** De forma a converter a "diferença",  $\Delta \ln N$ , nas suas duas componentes,  $\ln N$  para um certa classe e  $\ln N$  da classe de comprimento acima, necessitamos de um "ponto de início". Este ponto de início deveria ser baseado em uma frequência não contaminada pela sobreposição com a coorte seguinte (distribuição normal). Portanto, a frequência deve ser escolhida no lado esquerdo da primeira distribuição normal. De preferência, a frequência não deve ter um valor muito baixo.

Exemplo: A frequência 38 da classe de comprimento 16-17 foi escolhida como um "ponto de início limpo", conforme está indicado por "#". Foi colocada na coluna H como primeira entrada para N1, os números na distribuição de frequências de comprimento da primeira coorte. O ponto de início real é de facto o logaritmo de 38, a saber 3.638 (ver coluna C). Este valor é inserido na coluna G. A escolha de 38 como uma frequência "limpa" também implica que as frequências que ficam à sua esquerda, acima na tabela, (1, 4, 11 e 24) são também consideradas "limpas". Em outras palavras, supõe-se que nenhuma destas frequências está sobreposta pela próxima coorte. Assim são todas frequências "limpas" da primeira distribuição normal N1 (a coorte de primavera de 1983).

**Passo 10:** Temos agora  $\Delta \ln N_1$  correspondente às duas classes de comprimento adjacentes na coluna F e o primeiro  $\ln N_1$  da classe de comprimento na coluna G, que permite calcularmos o  $\ln N_1$  da próxima classe de comprimento superior usando a fórmula

$$\ln N_1 (\text{classe de comprimento superior}) = \ln N_1 (\text{classe de comprimento inferior}) + a \text{ correspondente } \Delta \ln N_1$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} \ln N_1(17-18) &= \ln N_1(16-17) + \Delta \ln N_1(17-18 \text{ e } 16-17) \\ \ln N_1(17-18) &= 3.638 + 0.111 = 3.749 \\ \ln N_1(18-19) &= 3.749 + (-0.205) = 3.544 \end{aligned}$$

Os novos valores são colocados na coluna G.

**Passo 11:** Tomando os antilogaritmos, o número correspondente a  $\ln N_1$  na coluna G pode ser encontrado e inserido na coluna H. Este processo encerra-se quando o número na coluna H aproxima-se de zero.

Exemplos:

para a classe de comprimento 17-18:  
 $N_1(17-18) = \exp(3.749) = 42.48$

para a classe de comprimento 18-19:  
 $N_1(18-19) = \exp(3.544) = 34.61$

Os resultados (coluna H) não correspondem exactamente às frequências observadas, dadas na coluna B, porque as observações desviam-se sempre um pouco dos valores teóricos. No presente caso como se trata de um conjunto de dados hipotéticos, as diferenças devem-se aos erros de arredondamentos. Com dados "reais" as diferenças também existirão e, neste caso, são devido ao "ruído aleatório". Mesmo que tivéssemos uma amostragem perfeita, as observações flutuariam em torno da verdadeira distribuição de comprimento (a distribuição de comprimento da população).

**Passo 12:** O número de peixes por classe de comprimento pertencente à coorte mais jovem (primavera de 1983) ou seja,  $N_1$ , na coluna G, pode agora ser subtraído da distribuição total, ou seja  $N_{1+}$ , na coluna B. A nova distribuição obtida é colocada na coluna I e chamada  $N_{2+}$ , a distribuição de frequências na segunda coorte, mais todas as coortes subsequentes.

$$N_{1+} \text{ menos } N_1 = N_{2+} \text{ ou } \text{coluna B} - \text{coluna H} = \text{coluna I}$$

Na prática, pode muito bem ocorrer que os valores na coluna I sejam negativos devido à variação aleatória das observações. No entanto, isto pode ser ajustado. Sempre que as estimações de  $N_{2+}$  fiquem negativas, atribuímos a  $N_{2+}$  (na coluna I) o valor zero, enquanto a  $N_1$  é dado o valor da coluna B.

Exemplos:

$42 - 42.8 = -0.48$ , que é ajustado a 0 na coluna I, e a 42 na coluna H

$33 - 34.61 = -1.61$ , que é ajustado a 0 na coluna I e a 33 na coluna H

Os resultados da análise completa da primeira distribuição normal serão:

A	B	H	I
L1-L2	$N_{1+}$	$N_1$	$N_{2+}$
12-13	1	1	0
13-14	4	4	0
14-15	11	11	0
15-16	24	24	0
16-17	38	38	0
17-18	42	42	0
18-19	33	33	0
19-20	20	20	0
20-21	7	7	0
21-22	3	2.81	0.19
22-23	3	0.65	2.35
23-24	5	0.11	4.89
24-25	8	0	8

Número total na coorte  $N_1 = 183.57$

$$\bar{L}(N1) = 17.35 \text{ e } s(N1) = 1.78$$

Como isto é baseado em um conjunto de dados hipoteticamente construídos, podemos comparar esses resultados com os valores reais, dados na Tabela 3.2.1.1 (primavera de 1983):

$$\text{Número total } (N1) = 182, \bar{L}(N1) = 17.3 \text{ e } s(N1) = 1.7$$

Neste caso, os resultados obtidos da análise são muito próximos dos valores reais. O que obtivemos são todos os elementos necessários para descrever a primeira distribuição normal, a saber,

$$\bar{L}(N1), s(N1) \text{ e } n(N1)$$

Todo o processo é agora repetido de forma a obtermos os valores da próxima distribuição normal, relativa à coorte que nasceu em Outono de 1982 (ver Tabela 3.2.1.1).

Terminamos, assim, a Tabela 3.4.1.1. Eliminando todos os valores pertencentes a N1, criamos a próxima folha de cálculo (Tabela 3.4.1.2) com N2+ (coluna I da Tabela 3.4.1.1) na nova coluna B. O procedimento completo pode então ser repetido.

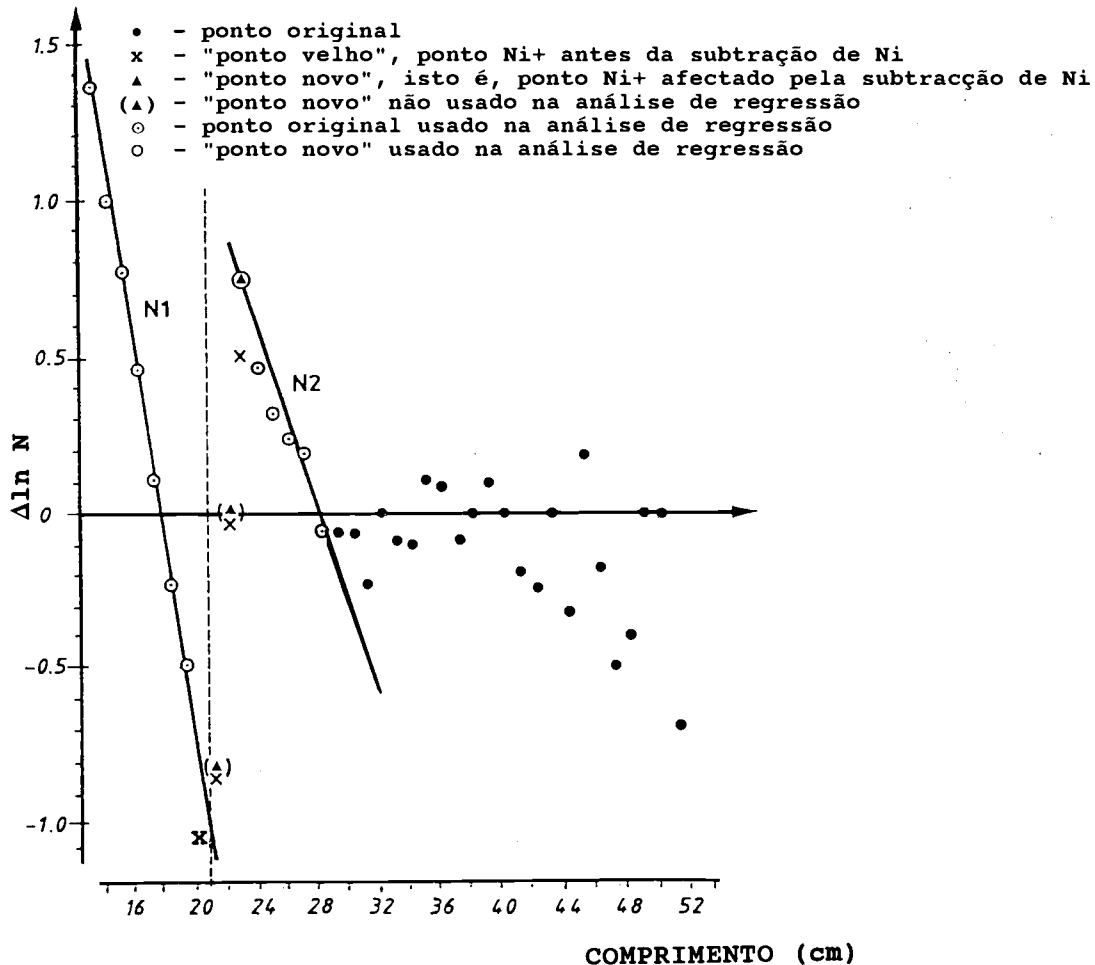


Fig. 3.4.1.3 Método de Bhattacharya: recta de regressão estimada para a segunda coorte (compare com as colunas D e E da Tabela 3.4.1.2)

**Tabela 3.4.1.2 Método de Bhattacharya: estimação da segunda coorte, N2 (coorte de Outono de 1982). # na coluna B, C, G e H indica onde começar os cálculos de N2 (compare com a Fig. 3.4.1.3)**

A	B	C	D	E	F	G	H	I
L1-L2	N2+	ln N2+	$\Delta \ln N2+$ (Y)	L (x)	$\Delta \ln N2$	ln N2	N2	N3+
12-13	0	-	-	-	-	-	0	0
13-14	0	-	-	13	-	-	0	0
14-15	0	-	-	14	-	-	0	0
15-16	0	-	-	15	-	-	0	0
16-17	0	-	-	16	-	-	0	0
17-18	0	-	-	17	-	-	0	0
18-19	0	-	-	18	-	-	0	0
19-20	0	-	-	19	-	-	0	0
20-21	0	-	-	20	-	-	0	0
21-22	0.19	-1.661	-	21	-	-	0.19	0
22-23	2.35	0.854	2.515	22	-	-	2.35	0
23-24	4.89	1.587	0.733	23*	-	-	4.89	0
24-25	8	2.079	0.492	24*	-	-	8	0
25-26	11	2.398	0.319	25*	-	-	11	0
26-27	14#	2.639#	0.241	26*	0.248	2.639#	14#	0
27-28	17	2.833	0.194	27*	0.107	2.746	15.58	1.42
28-29	16	2.773	-0.060	28*	-0.034	2.712	15.06	0.94
29-30	15	2.708	-0.065	29	-0.175	2.537	12.64	2.36
30-31	14	2.639	-0.069	30	-0.316	2.221	9.22	4.78
31-32	11	2.398	-0.241	31	-0.457	1.764	5.84	5.16
32-33	11	2.398	0.000	32	-0.598	1.166	3.21	7.79
33-34	10	2.303	-0.095	33	-0.740	0.426	1.53	8.47
34-35	9	2.197	-0.106	34	-0.881	-0.455	0.63	8.37
35-36	10	2.303	0.106	35	-1.022	-1.477	0.23	9.77
36-37	11	2.398	0.095	36	-1.163	-2.640	0.07	10.93
37-38	10	2.303	-0.095	37	-	-	-	10
38-39	10	2.303	0.000	38	-	-	-	10
39-40	11	2.398	0.095	39	-	-	-	11
40-41	11	2.398	0.000	40	-	-	-	11
41-42	9	2.197	-0.201	41	-	-	-	9
42-43	7	1.946	-0.251	42	-	-	-	7
43-44	7	1.946	0.000	43	-	-	-	7
44-45	5	1.609	-0.337	44	-	-	-	5
45-46	6	1.792	0.183	45	-	-	-	6
46-47	5	1.609	-0.183	46	-	-	-	5
47-48	3	1.099	-0.510	47	-	-	-	3
48-49	2	0.693	-0.406	48	-	-	-	2
49-50	2	0.693	0.000	49	-	-	-	2
50-51	2	0.693	0.000	50	-	-	-	2
51-52	1	0.000	-0.693	51	-	-	-	1

Número total na coorte N2:

104.44

\*) Pontos usados na análise de regressão:

$$a = 3.9168, \quad b = -0.1411, \quad \bar{L}(N2) = -a/b = 27.77$$

$$s(N2) = \sqrt{-dL/b} = 2.66$$

A Fig. 3.4.1.3 mostra o gráfico de Bhattacharya para N2+ juntamente com a recta estimada para N1. Somente os pontos à direita da linha a tracejado na Fig. 3.4.1.3 são agora usados na análise. A recta N1 é mostrada somente para comparação. Alguns pontos estão deslocados, devido à subtracção de N1. Os pontos "antigos" (isto é, aqueles do gráfico de N1+) estão indicados por "x" e os "novos", nos casos em que a mudança é visível, estão indicados por um ponto; os dois primeiros pontos (correspondentes aos comprimentos 21 e 22 cm) foram desprezados, pois referem-se a um número muito pequeno de indivíduos.

A selecção de pontos para ajustar uma recta é, agora um pouco mais difícil do que no caso da primeira coorte. Na Fig. 3.4.1.3 foram escolhidos seis pontos entre os comprimentos 23 a 28 cm. Pode-se questionar: por que se deu preferência a estes pontos, em vez de outros, por exemplo, entre os comprimentos 24 a 29 cm ou entre os comprimentos 24 a 28 cm. A escolha é subjectiva. Os resultados do método de Bhattacharya podem ser, às vezes, dependentes da pessoa que faz a análise. Se, por exemplo, somente os pontos entre os comprimentos 24 a 27 cm fossem usados, o comprimento médio estimado seria de 28.7 cm e o desvio padrão de 3.2 cm. A verdadeira escolha na Fig. 3.4.1.3 dá um valor médio de  $L(N2) = 27.77$  cm e um desvio padrão  $s(N2) = 2.66$  cm, que são muito próximos dos valores reais (ver Tabelas 3.2.1.1 e 3.4.1.2). Contudo, isto não pode ser usado como justificação para esta escolha, porque, na vida real, nós não saberíamos quais seriam os valores verdadeiros. Da mesma forma, a selecção do valor "limpo" de  $\ln N2$ , do qual  $N2$  e  $N3+$  são calculados, é subjectiva. Quanto mais as observações se desviam das frequências calculadas, mais pronunciada é a subjectividade.

Em suma, os resultados obtidos são:

coorte N1: comprimento médio 17.35 cm, desvio padrão 1.78 cm  
(Tabela 3.4.1.1)

coorte N2: comprimento médio 27.77 cm, desvio padrão 2.66 cm  
(Tabela 3.4.1.2)

Agora que os comprimentos médios das duas primeiras coortes foram estimados, podemos obter uma primeira estimação grosseira do parâmetro K de von Bertalanffy, dado que também temos uma estimação da diferença de idade entre as duas coortes. Usamos as Eqs. 3.4.0.1 e 3.4.0.2 com uma diferença de tempo entre as duas coortes igual a  $t2-t1 = 0.5$  ano. Podemos ainda obter uma estimação grosseira de  $L_{\infty}$ , que nos diz que os peixes raramente são maiores que 50 cm, e assim  $L_{\infty} = 50$  cm. Da Eq. 3.4.0.1 obtemos:

$$K = \frac{1}{t2-t1} * \ln \frac{L_{\infty} - \bar{L}(t1)}{L_{\infty} - \bar{L}(t2)} = \frac{1}{0.5} * \ln \frac{50-17.35}{50-27.77} = 0.77$$

e para Eq. 3.4.0.2:

$$t_o = t1 + \frac{1}{K} * \ln(1 - \frac{\bar{L}(t1)}{L_{\infty}}) = 0.5 + \frac{1}{0.77} * \ln(1 - \frac{17.35}{50}) = -0.05$$

onde o valor  $t1 = 0.5$  é uma idade arbitrária.

Assim, como uma primeira estimação grosseira da curva de crescimento temos:

$$L(t) = 50 * [1 - \exp(-0.77 * (t+0.05))]$$

A estimacção, apresentada acima, geralmente não é recomendada, mas é aqui mostrada para demonstrar como poucos dados são realmente necessários para estimar grosseiramente uma curva de crescimento. Tal estimacção inicial, entretanto, pode ser usada para prever o próximo comprimento médio, ou seja, o comprimento médio da coorte N3.

**Tabela 3.4.1.3 Método de Bhattacharya: estimação da terceira coorte, N3 (coorte de primavera de 1983). # nas colunas B,G e H indica onde começar os cálculos de N3 (compare com Fig. 3.4.1.4)**

A	B	C	D	E	F	G	H	I
L1-L2	N3+	ln N3+	$\Delta \ln N3+$	L	$\Delta \ln N3$	ln N3	N3	N4+
.....								
25-26	0	-	-	25	-	-	0	0
26-27	0	-	-	26	-	-	0	0
27-28	1.42	0.351	-	27	-	-	1.42	0
28-29	0.94	-0.062	-0.413	28	-	-	0.94	0
29-30	2.36	0.859	0.921	29	-	-	2.36	0
30-31	4.78	1.564	0.705	30 *	-	-	4.78	0
31-32	5.16	1.641	0.077	31 *	-	-	5.16	0
32-33	7.79#	2.053#	0.412	32 *	-	2.053#	7.79#	0
33-34	8.47	2.137	0.084	33 *	0.111	2.164	8.71	0
34-35	8.37	2.125	-0.012	34 *	-0.032	2.132	8.43	0
35-36	9.77	2.279	0.154	35	-0.175	1.957	7.08	2.69
36-37	10.93	2.392	0.113	36	-0.318	1.639	5.15	5.78
37-38	10	2.303	-0.089	37	-0.460	1.179	3.25	6.75
38-39	10	2.303	0.000	38	-0.603	0.576	1.78	8.22
39-40	11	2.398	0.095	39	-0.746	-0.170	0.84	10.16
40-41	11	2.398	0.000	40	-0.888	-1.058	0.35	10.65
41-42	9	2.197	-0.201	41	-1.031	-2.089	0.12	8.88
42-43	7	1.946	-0.251	42	-1.174	-3.263	0.04	6.96
43-44	7	1.946	0.000	43	-	-	-	7
44-45	5	1.609	-0.337	44	-	-	-	5
45-46	6	1.792	0.183	45	-	-	-	6
46-47	5	1.609	-0.183	46	-	-	-	5
47-48	3	1.099	-0.510	47	-	-	-	3
48-49	2	0.693	-0.406	48	-	-	-	2
49-50	2	0.693	0.000	49	-	-	-	2
50-51	2	0.693	0.000	50	-	-	-	2
51-52	1	0.000	-0.693	51	-	-	-	1

Número total na coorte N3: 58.20

\*) Pontos usados na análise de regressão:

$a = 4.8196, b = -0.1427, \bar{L}(N3) = -a/b = 33.77,$   
 $s(N3) = \sqrt{-dL/b} = 2.65$

**Tabela 3.4.1.4 Estimação de K e  $t_0$  pelo método gráfico de von Bertalanffy usando como entrada idades arbitrárias, e os comprimentos médios estimados nas tabelas 3.4.1.1 a 3.4.1.3 (compare com Tabela 3.3.3.1).**

t (x)	$\bar{L}(t)$	$-\ln(1-\bar{L}(t)/50)$ (y)
0.5	17.4	0.428
1.0	27.8	0.812
1.5	33.8	1.127

$a$  (intersecção) = 0.09  
 $b$  (declive) = 0.699,  $K = 0.7$  por ano  
 $t_0 = -a/b = -0.13$  ano

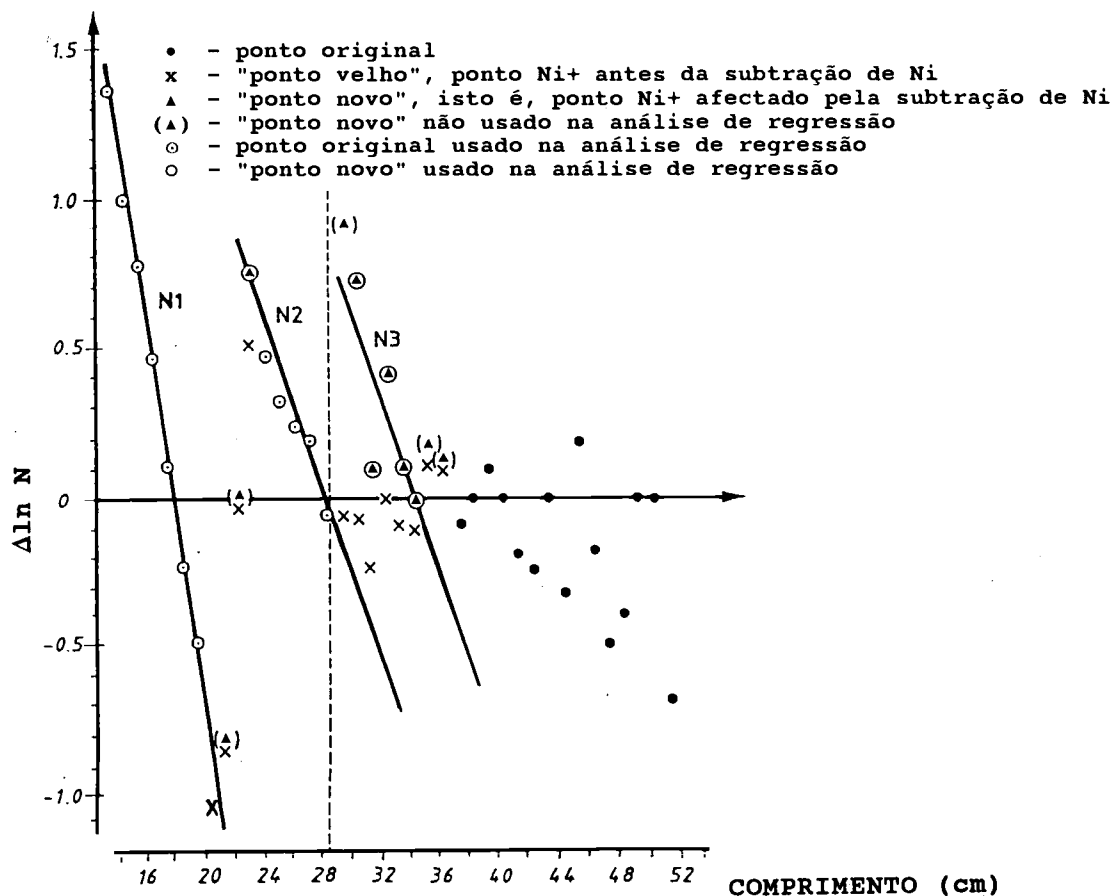


Fig. 3.4.1.4 Método de Bhattacharya: recta de regressão estimada para a terceira coorte (compare colunas D e E na Tabela 3.4.1.3)

Tabela 3.4.1.5 Método de Bhattacharya: tentativa de estimar a quarta coorte, N4 (coorte de outubro de 1981), compare à Fig.3.4.1.5

A	B	C	D	E	F	G	H	I
L1-L2	N4+	ln N4+	Δln N4+	L	Δln N4	ln N4	N4	N5+
34-35	0	-	-	34	-	-	0	0
35-36	2.69	0.990	0.990	35	?	?	?	?
36-37	5.78	1.754	0.764	36	?	?	?	?
37-38	6.75	1.910	0.156	37 (*)	?	?	?	?
38-39	8.22	2.107	0.197	38 (*)	?	?	?	?
39-40	10.16	2.318	0.211	39 (*)	?	?	?	?
40-41	10.65	2.366	0.048	40 (*)	?	?	?	?
41-42	8.88	2.184	-0.184	41 (*)	?	?	?	?
42-43	6.96	1.940	-0.244	42	?	?	?	?
43-44	7	1.946	0.006	43	?	?	?	?
44-45	5	1.609	-0.337	44	?	?	?	?
45-46	6	1.792	0.183	45	?	?	?	?
46-47	5	1.609	-0.183	46	?	?	?	?
47-48	3	1.099	-0.510	47	?	?	?	?
48-49	2	0.693	-0.406	48	?	?	?	?
49-50	2	0.693	0.000	49	?	?	?	?
50-51	2	0.693	0.000	50	?	?	?	?
51-52	1	0.000	-0.693	51	?	?	?	?





## Erros

Os dados de entrada para a análise de Bhattacharya estão geralmente viciados devido à selecção da arte de pesca e ao recrutamento, isto é, os peixes pequenos estão sub-representados nas amostras de frequências, ou porque eles escapam através das malhas da rede, ou porque eles ainda não migraram das áreas de reprodução para as áreas de pesca (ver Secção 7.1). Os aspectos relacionados com os erros causados pela selectividade serão discutidos no Capítulo 6, onde também será apresentado um método de ajuste das amostras de frequências de comprimento devido à selectividade. Em muitos casos, a análise de Bhattacharya deve ser precedida por um ajuste em função da selectividade.

Outra fonte de erro é observada em espécies migradoras. Algumas vezes faltam componentés, porque a coorte não estava presente na área onde as amostras foram tomadas, aspecto este que será discutido no Capítulo 11.

## Programas de computadores

A análise de Bhattacharya leva algum tempo a ser feito manualmente, no entanto, com a ajuda de um computador (que pode ser um microcomputador), o método não é difícil de ser efectuado.

O programa "BHATTAC", no pacote de programas LFSA para microcomputadores (ver Capítulo 15) segue de perto as explicações dadas anteriormente. Com um pouco de experiência, pode-se fazer o exercício da Secção 3.4.1 com o BHATTAC em poucos minutos. O programa tem algumas outras características: sempre que se estima uma componente, o BHATTAC mostra um diagrama como o da Fig. 3.2.2.2, permitindo avaliar os ajustes aos dados originais. O BHATTAC também verifica se os resultados são razoáveis, ou não, pelo cálculo do "índice de separação", descrito na Secção 3.5.4. Talvez a característica mais importante do BHATTAC, comparada ao "método manual", é que permite fazer a análise várias vezes, cada vez com um conjunto diferente de dados de entrada. Pode-se querer, por exemplo, experimentar várias formas alternativas de ajustar as rectas no diagrama de Bhattacharya.

Um dos pontos fracos da versão "manual" do método de Bhattacharya é a estimação do número de peixes em cada coorte, já que é baseada em uma selecção subjectiva de um "ponto limpo", do qual os valores de  $\ln N_{a+}$  são calculados. Uma abordagem estatística mais rigorosa seria utilizar todos os pontos usados para a estimação da recta de regressão. De facto este procedimento mais correto, é aplicado em BHATTAC.

Ao realizar a análise de Bhattacharya no computador, deve-se sempre, como rotina, experimentar diferentes tamanhos de classes de comprimento (ver Exercício 3.4.1), pois acontece, geralmente, que a estrutura dos pontos no diagrama de Bhattacharya só sai para um tamanho óptimo de classes de comprimento, que se pode encontrar simplesmente, tentando várias alternativas. Uma melhoria semelhante pode ser obtida agrupando dados de períodos mais longos. Na maioria dos casos, está-se a trabalhar com séries temporais de frequências de comprimento (tratado na Secção 3.4.2), por exemplo, na forma de frequências de comprimento mensais. Pode-se, então, trabalhar, por exemplo, com amostras representando 1 mês, ou agrupar os dados de três meses, para representar um trimestre do ano. Tais agregações alternativas dos dados básicos podem ser facilmente realizadas por computador.

O pacote de programas "COMPLEAT ELEFAN" para microcomputadores contém um programa "MPA", que também faz o exercício de Bhattacharya. O FISAT contém o mesmo programa.

Pauly e Caddy (1985), desenvolveram uma versão um pouco diferente do método de Bhattacharya para uma calculadora programável. Na versão destes autores, as rectas são determinadas somente por três pontos sucessivos, que são

escolhidos de modo a terem o coeficiente de correlação negativo mais alto. A versão é uma tentativa de tornar objectivo o método de Bhattacharya, isto é, um método que produza resultados, independentemente da pessoa que realiza a análise.

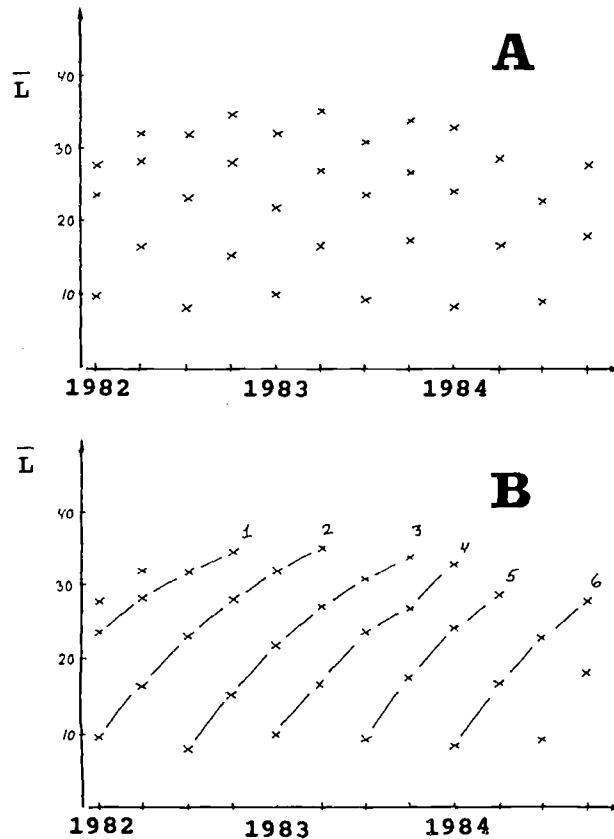
(Ver **Exercício(s)** na Parte 2).

### 3.4.2 Análise de progressão modal

O exemplo 10 usado na Secção 3.4.1 foi baseado em uma amostra de frequências de comprimento proveniente dum cruzeiro de investigação. Demonstrou-se que se poderia obter, de tal conjunto de dados, uma estimação grosseira da equação de crescimento.  $L_{\infty}$  e  $K$  podem ser estimados, enquanto  $t_0$  só pode ser determinado dependendo da idade arbitrária estabelecida para a coorte.

#### Exemplo 11: Análise de progressão modal, baseada nos dados do Exemplo 4

Suponha agora que tem o tipo de dados descritos no Exemplo 4 da Secção 3.2.1, ou seja, amostras de frequências de comprimento mensais ou trimestrais durante 1 ou mais anos. O exemplo ilustrado na Fig. 3.2.1.1. consiste em 12 amostras de frequências de comprimento colhidas em Janeiro, Abril, Julho e Outubro durante três anos (1982 a 1984). Tal série de dados colocamos em uma posição melhor para estimar os parâmetros de crescimento do que uma só amostra (Outubro), como utilizado no Exemplo 10 para ilustrar a análise de Bhattacharya.



**Fig. 3.4.2.1** Progressão modal baseada nos resultados das análises de Bhattacharya  
A: Comprimentos médios das componentes a partir dos diagramas de Battacharya  
B: Comprimentos médios interligados para representar as coortes assumidas

**Tabela 3.4.2.1 Resultados da análise de Bhattacharya da série temporal de amostras de frequências de comprimento, ilustrada na Fig. 3.2.1.1**

data da amostra	terceira componente	segunda componente	primeira componente
JAN 82	27.9	23.5	9.8
ABR 82	32.0	28.1	16.5
JUL 82	31.8	23.1	8.0
OUT 82	34.6	28.0	15.3
JAN 83	32.0	21.8	10.0
ABR 83	35.1	27.0	16.5
JUL 83	30.9	23.5	9.2
OUT 83 *)	33.8	27.8	17.4
JAN 84	32.9	24.0	8.3
ABR 84	-	28.2	16.8
JUL 84	-	22.9	9.0
OUT 84	-	27.9	18.0

\*) da Tabela 3.4.1.4.

**Tabela 3.4.2.2 Comprimentos médios da Tabela 3.4.2.1 rearranjados em coortes (ver Fig. 3.2.1.1)**

data da amostra	COORTES, $\bar{L}(t)$ in cm					
	1	2	3	4	5	6
	Primavera 1981	Outono 1981	Primavera 1982	Outono 1982	Primavera 1983	Outono 1983
JAN 82	23.5	9.8	-	-	-	-
ABR 82	28.1	16.5	-	-	-	-
JUL 82	31.8	23.1	8.0	-	-	-
OUT 82	34.6	28.0	15.3	-	-	-
JAN 83	-	32.0	21.8	10.0	-	-
ABR 83	-	35.1	27.0	16.5	-	-
JUL 83	-	-	30.9	23.5	9.2	-
OUT 83	-	-	33.8	27.8	17.4	-
JAN 84	-	-	-	32.9	24.0	8.3
ABR 84	-	-	-	-	28.2	16.8
JUL 84	-	-	-	-	-	22.9
OUT 84	-	-	-	-	-	27.9

Suponha também, que a cada uma das doze amostras é dado o mesmo tratamento como a de Outubro de 1983. Os resultados das doze análises de Bhattacharya poderiam ser os da Tabela 3.4.2.1. Em cada uma das primeiras nove amostras foram encontradas três componentes (como no caso da Secção 3.4.1), mas as três últimas amostras foram mais difíceis de analisar, e somente duas puderam ser identificadas. Note que o número de componentes (coortes) que poderiam ser identificados é bem menor que o número real, representado por pontos na Fig. 3.2.1.1.

Podemos assumir que as várias coortes permanecem no mar por algum tempo e são amostradas em diferentes estádios de crescimento, variando desde a data do recrutamento à área de pesca (ou de amostragem) até à sua extinção. Podemos também assumir que o comprimento médio de uma coorte, determinado pelo método de Bhattacharya, corresponderá uns meses depois, a um comprimento médio maior, e assim por diante. Marcando os comprimentos médios de uma série de amostras contra o tempo e fazendo a ligação dos pontos, pode-se obter uma curva de crescimento.

Na Fig. 3.4.2.1A os comprimentos médios das componentes foram marcados contra a data de amostragem. Na Fig.3.4.2.1B os comprimentos médios, que acreditamos corresponder às mesmas coortes, foram ligados. Excluídos os dois primeiros e os dois últimos pontos temos, assim, identificadas seis coortes. A ligação dos pontos para identificar coortes é um processo subjectivo, embora no presente caso a escolha pareça bastante fácil de fazer. Na prática, nem sempre é, tão simples.

A Fig. 3.4.2.1B parece indicar que existem duas coortes por ano, por exemplo, as coortes nº 3 e nº 4 são recrutadas em 1982. Assumindo as estações do Hemisfério Norte, a coorte nº 3 é chamada coorte da primavera de 1982 e a coorte nº 4 é chamada coorte de outono. As várias curvas de crescimento desenhadas para cada coorte, permitem rearranjar os resultados da análise de Bhattacharya (Tabela 3.4.2.1) por coorte, conforme mostrado na Tabela 3.4.2.2.

#### Estimação de K e $L_{\infty}$

Os dados na Tabela 3.4.2.2 permitem aplicar o método gráfico de Gulland e Holt (ver Secção 3.3.1) calculando:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{(t+\Delta t) - t} \quad e$$

$$\bar{L}(t, t+\Delta t) = \frac{L(t) + L(t+\Delta t)}{2}$$

O intervalo de tempo  $\Delta t = 0.25$  ano permanece constante neste caso e, portanto, também seria possível aplicar o método de Chapman (Eq. 3.3.2.2).

Os valores  $\Delta L/\Delta t$  e  $\bar{L}(t, t+\Delta t)$  são mostrados na Tabela 3.4.2.3. Para ilustrar os cálculos, consideramos a coorte nº 1, recrutada na primavera de 1981 (ver Fig. 3.4.2.1). Para as duas primeiras amostras obtemos:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L(\text{Abr } 82) - L(\text{Jan } 82)}{t(\text{Abr } 82) - t(\text{Jan } 82)} = \frac{28.1 - 23.5}{0.25} = 18.4 \quad e$$

$$\bar{L}(\text{Jan } 82, \text{Abr } 82) = \frac{L(\text{Jan } 82) + L(\text{Abr } 82)}{2} = (23.5 + 28.1) / 2 = 25.8$$

Seria possível fazer gráficos de Gulland e Holt para cada uma das seis coortes, cada uma com apenas dois a quatro pontos. No entanto, sob a hipótese de que os parâmetros de crescimento permanecessem constantes ao longo de todo o período da amostragem, todos os 23 pares de dados da Tabela 3.4.2.3 podem ser combinados em um único gráfico de Gulland e Holt.

A regressão de todos os 23 pares de valores de  $\Delta L/\Delta t$  contra  $\bar{L}(t, t+\Delta t)$  fornece os seguintes resultados:

$$a \text{ (intersecção)} = 41.84 \text{ e } b \text{ (declive)} = -0.8740$$

dos quais obtemos:

$$L_{\infty} = -a/b = 47.9, \text{ digamos } 48 \text{ cm, e}$$

$$K = -b = 0.87 \text{ por ano com um intervalo de confiança de 95\%:} \\ [0.72, 1.02] \text{ (ver Tabela 3.4.2.3).}$$

O gráfico de Gulland e Holt é mostrado na Fig. 3.4.2.2. Estimações de  $L_{\infty}$  e K foram, assim, obtidas considerando toda a série temporal.

**Tabela 3.4.2.3** Dados de entrada e análise de regressão para o gráfico de Gulland e Holt, derivados da Tabela 3.4.2.2. Note que  $\Delta t = 0.25$  ano

coorte	1 primavera 1981		2 outono 1981		3 primavera 1982		4 outono 1982		5 primavera 1983		6 outono 1983	
	$\bar{L}$	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$	$\bar{L}$	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$	$\bar{L}$	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$	$\bar{L}$	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$	$\bar{L}$	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$	$\bar{L}$	$\frac{\Delta L}{\Delta t}$
JAN 82												
ABR 82	25.8	18.4	13.2	26.8	-	-	-	-	-	-	-	-
JUL 82	30.0	14.8	19.8	26.4	-	-	-	-	-	-	-	-
OUT 82	33.2	11.2	25.6	19.6	11.7	29.2	-	-	-	-	-	-
JAN 83	-	-	30.0	16.0	18.6	26.0	-	-	-	-	-	-
ABR 83	-	-	33.6	12.4	24.4	20.8	13.3	26.0	-	-	-	-
JUL 83	-	-	-	-	29.0	15.6	20.0	28.0	-	-	-	-
OUT 83	-	-	-	-	32.4	11.6	25.7	17.2	13.3	32.8	-	-
JAN 84	-	-	-	-	-	-	30.4	20.4	20.7	26.4	-	-
ABR 84	-	-	-	-	-	-	-	-	26.1	16.8	12.6	34.0
JUL 84	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20.0	24.4
OUT 84	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25.4	20.0

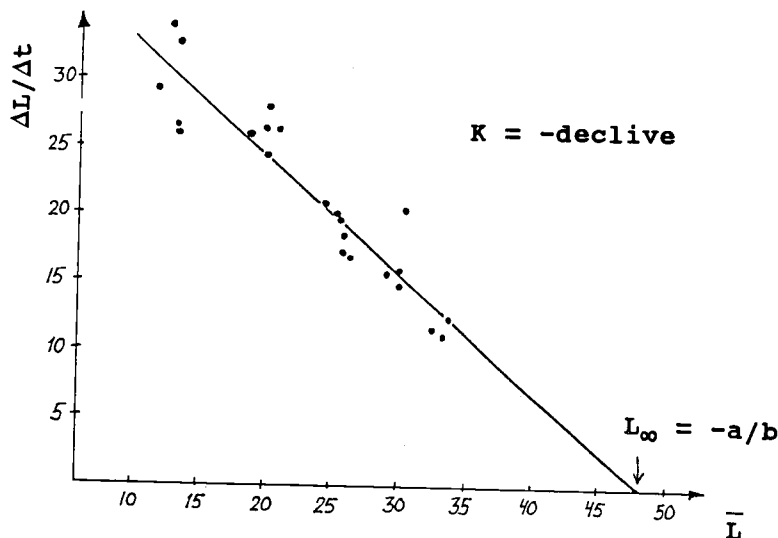
$a = 41.84$                        $b = -0.8740$

$sb^2 = \frac{1}{n-2} * ((sy/sx)^2 - b^2) =$   
 $\frac{1}{23-2} * ((6.62333/7.08467)^2 - (-0.8740)^2) = 0.005242$

$K = -b = 0.87$  por ano,  $L_{\infty} = -a/b = 47.9$  cm

$sb = 0.072$ ,  $t_{21} = 2.09$  (ver Tabela 2.3.1)

intervalo de confiança de  $b$  ( $= -K$ ) a 95%:  $[-1.02, -0.72]$   
 e de  $K$ :  $[0.72, 1.02]$



**Fig. 3.4.2.2** Gráfico de Gulland e Holt baseado em dados da Tabela 3.4.2.3

**Estimação de  $t_0$**

O próximo passo é estimar os parâmetros de condição inicial (arbitrários)  $t_{01}$ , para as coortes de primavera, e  $t_{02}$  para as coortes de outono, usando o método gráfico de von Bertalanffy. Atribuímos uma idade arbitrária de um ano à coorte da primavera de 1981 em Janeiro de 1982, 1.25 ano em Abril de 1982, etc. À coorte de primavera de 1982, nº 3, é também atribuída uma idade de um ano em Janeiro de 1983 etc., sendo o procedimento semelhante para as coortes de outono.

A Tabela 3.4.2.4 contém as idades arbitrárias,  $t(i)$ , de cada coorte, juntamente com a variável dependente do método de von Bertalanffy:

$$y = -\ln(1 - \bar{L}(t)/L_{\infty})$$

Os valores de  $\bar{L}(t)$  são tomados da Tabela 3.4.2.2. Há duas análises de regressão a realizar:

Coortes de primavera:  $y = -K*t_{01} + K*t(i)$  ,  $i = 1,3,5$   
 Coortes de outono :  $y = -K*t_{02} + K*t(i)$  ,  $i = 2,4,6$

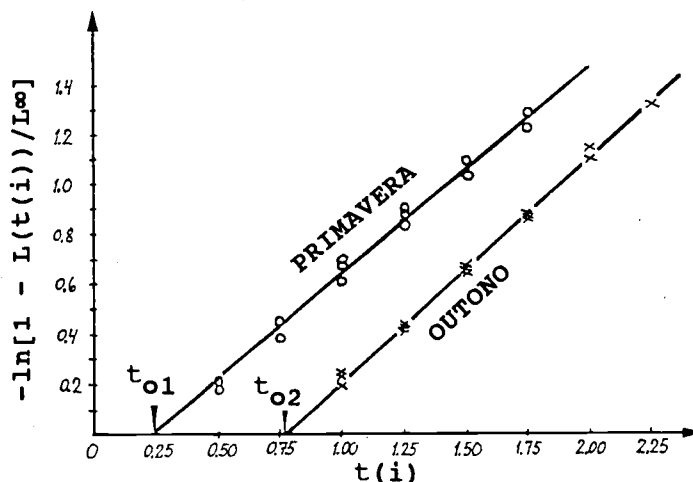
onde a variável independente  $t(i)$  é a idade arbitrária da coorte nº  $i$ , como definido na Tabela 3.4.2.4. Neste caso, são consideradas seis coortes simultaneamente, e acreditamos que hajam três coortes de primavera e três coortes de outono. Conforme mostrado na Tabela 3.4.2.4, as duas análises de regressão resultaram em:

	a (intersecção)	b (declive)	$t_{01} =$ $-a/b$ ano	K (por ano)
coortes de primavera:	-0.2055	0.8433	0.24	0.84
coortes de outono :	-0.7305	0.9169	0.80	0.92

Como se esperava, a diferença entre  $t_{01}$  e  $t_{02}$  é próxima a 0.5 ano, como explicado na Secção 3.2.1 (ver Tabela 3.2.1.2) para este exemplo. A média dos dois valores de K é 0.88 (próxima ao valor de 0.87 estimado pelo método gráfico de Gulland e Holt). Um teste estatístico mostraria que estas estimações não são significativamente diferentes e, portanto, usaríamos o valor comum  $K = 0.88$  por ano. Assim, as duas equações:

Coortes de primavera:  $L(t) = 48*[1 - \exp(-0.88*(t-0.24))]$   
 Coortes de outono :  $L(t) = 48*[1 - \exp(-0.88*(t-0.80))]$

podem ser usadas para calcular o tamanho das coortes de primavera e de outono para diferentes idades arbitrárias. Podemos parar a análise nesta fase, ou continuar e estimar a data de nascimento das coortes.



**Fig. 3.4.2.3 Os dois gráficos de von Bertalanffy baseados em dados da Tabela 3.4.2.4**

**Tabela 3.4.2.4** Dados de entrada e análise de regressão para o gráfico de Bertalanffy. Comprimentos médios das componentes,  $L(t)$  derivados da Tabela 3.4.2.2,  $L_{\infty} = 48$  cm

**A: coortes de primavera**

data da amostra	nº 1 primav. 1981		nº 3 primav. 1982		nº 5 primav. 1983		época da amostragem T = (x)
	t(1)	y*)	t(3)	y*)	t(5)	y*)	
JAN 82	1.00	0.673	-	-	-	-	1982.00
ABR 82	1.25	0.880	-	-	-	-	1982.25
JUL 82	1.50	1.086	0.50	0.182	-	-	1982.50
OUT 82	1.75	1.276	0.75	0.384	-	-	1982.75
JAN 83	-	-	1.00	0.605	-	-	1983.00
ABR 83	-	-	1.25	0.827	-	-	1983.25
JUL 83	-	-	1.50	1.032	0.50	0.213	1983.50
OUT 83	-	-	1.75	1.218	0.75	0.450	1983.75
JAN 84	-	-	-	-	1.00	0.693	1984.00
ABR 84	-	-	-	-	1.25	0.886	1984.25
JUL 84	-	-	-	-	-	-	1984.50
OUT 84	-	-	-	-	-	-	1984.75

coortes de primavera: n = 14

a = -0.2055, b = 0.8433, e K = 0.84 por ano

$t_{o1} = -a/b = 0.24$  ano

$$sb^2 = \frac{1}{n-2} * [(sy/sx)^2 - b^2] = \frac{1}{14-2} * [(0.35016/0.41313)^2 - 0.84332^2] = 0.0006005$$

sb = 0.0245,  $t_{12} = 2.18$  (ver Tabela 2.3.1)

intervalo de confiança para b (= K) a 95% : [0.79 , 0.90]

**B: coortes de outono**

data da amostra	nº 2 outono 1981		nº 4 outono 1982		nº 6 outono 1983		época da amostra T = (x)
	t(2)	y*)	t(4)	y*)	t(6)	y*)	
JAN 82	1.00	0.228	-	-	-	-	1982.00
ABR 82	1.25	0.241	-	-	-	-	1982.25
JUL 82	1.50	0.656	-	-	-	-	1982.50
OUT 82	1.75	0.875	-	-	-	-	1982.75
JAN 83	2.00	1.099	1.00	0.234	-	-	1983.00
ABR 83	2.25	1.314	1.25	0.421	-	-	1983.25
JUL 83	-	-	1.50	0.673	-	-	1983.50
OUT 83	-	-	1.75	0.866	-	-	1983.75
JAN 84	-	-	2.00	1.157	1.00	0.190	1984.00
ABR 84	-	-	-	-	1.25	0.431	1984.25
JUL 84	-	-	-	-	1.50	0.648	1984.50
OUT 84	-	-	-	-	1.75	0.870	1984.75

coortes de outono: n = 15

a = -0.7305, b = 0.9169, e K = 0.92 por ano

$t_{o2} = -a/b = 0.80$  ano

$$sb^2 = \frac{1}{n-2} * [(sy/sx)^2 - b^2] = \frac{1}{15-2} * [(0.36593/0.39491)^2 - 0.91692^2] = 0.0001375$$

sb = 0.037,  $t_{13} = 2.16$  (ver Tabela 2.3.1)

intervalo de confiança de b (= K) a 95% : [0.84 , 1.00]

\*)  $y = -\ln(1 - \bar{L}(t)/L_{\infty})$

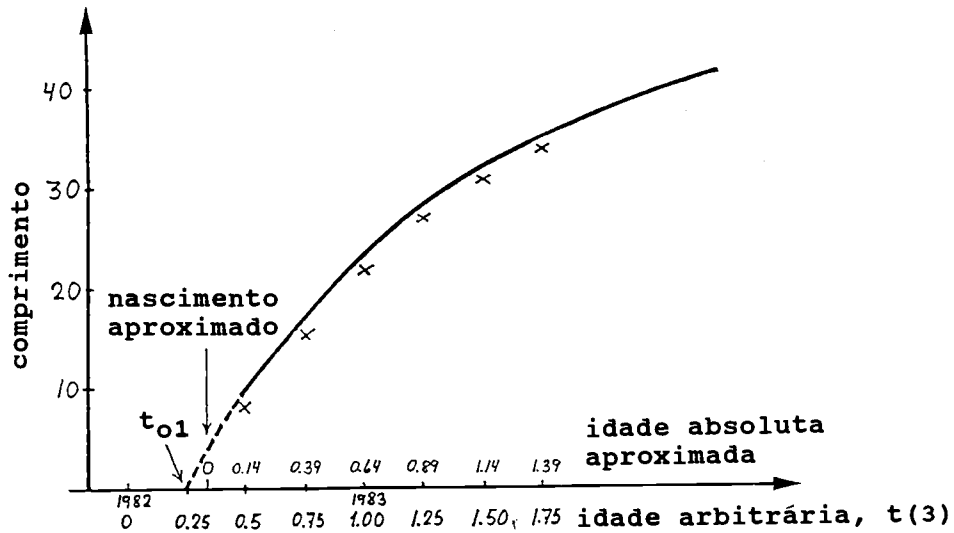


Fig. 3.4.2.4 Ilustração de como estimar a data aproximada da eclosão

#### Estimação da data de eclosão

Para estimar a data de nascimento, a ideia é extrapolar a curva de crescimento para trás do primeiro ponto de dados e ver onde ela cruza com o eixo do tempo, como ilustrado na Fig. 3.4.2.4, que mostra como exemplo a coorte nº 3. A curva corta o eixo do tempo no ponto 1982.24. No eixo da idade arbitrária, o ponto de intersecção é  $t_{01} = 0.24$ . O ponto 1982.24 (29 de Março) deve estar próximo da data de nascimento. Como a curva de crescimento de von Bertalanffy não se ajusta à fase inicial da vida dos peixes (ver Secção 3.1) esta estimação é aproximada. Uma forma alternativa de encontrar a data aproximada do nascimento é usar informação sobre os estados de maturação das gonadas.

#### O uso de dados de maturação das gonadas

Outro método de estimar a data de nascimento é estimar a época de desova a partir dos dados de estados de maturação. A Fig. 3.4.2.5 mostra um exemplo de dados dos estados de maturação (de Wyatt, 1983). Neste caso são apresentadas as percentagens dos três principais estados de maturação das gonadas.

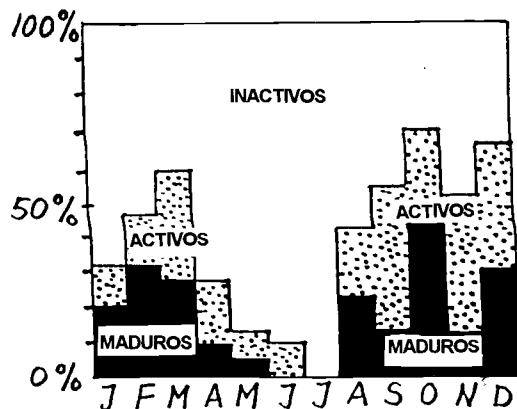


Fig. 3.4.2.5 Estados de maturação do peixe esquilo (*Holocentrus rufus*) de Wyatt (1983). Baseado em amostras de 1331 peixes



Dos dados de estados de maturação, isto é, um gráfico com as percentagens dos peixes maduros, podemos definir um (ou dois) dia(s) médio(s) de desova, da mesma forma que o dia médio de recrutamento foi definido no Capítulo 1, consoante o gráfico é unimodal (ou bimodal). O histograma de percentagens de peixes maduros na Fig. 3.4.2.5 poderia ser interpretado como duas épocas de desova, com dois picos em Fevereiro e Outubro. O dia médio de desova pode, então, ser usado como uma estimacão do dia de nascimento (corrigida por um lapso de tempo). No entanto, os resultados de tal análise devem ser tratados com uma certa reserva, pois flutuações na desova não são o único factor que determinam flutuações no recrutamento. O sucesso de uma larva alimentar-se e crescer até tornar-se um recruta e ao mesmo tempo evitar de ser comida por predadores é um processo complexo afectado por uma variedade de factores ambientais (bióticos e abióticos). A taxa de sobrevivência, por exemplo, poderia ser quase nula numa estação de desova e alta noutra. Uma discussão destes assuntos encontra-se, por exemplo, em Bakun *et al.* (1982).

### A aplicação da análise de progressão modal

As estimacões obtidas por progressão das modas (= coortes) nas frequências de comprimento correspondem a um método considerado superior ao baseado em uma única amostra (Secção 3.4.1). Além disso existem casos em que a abordagem de uma única amostra não é aplicável, é o caso de espécies de vida curta nas quais existe somente uma (ou duas) coortes em uma amostra de frequências

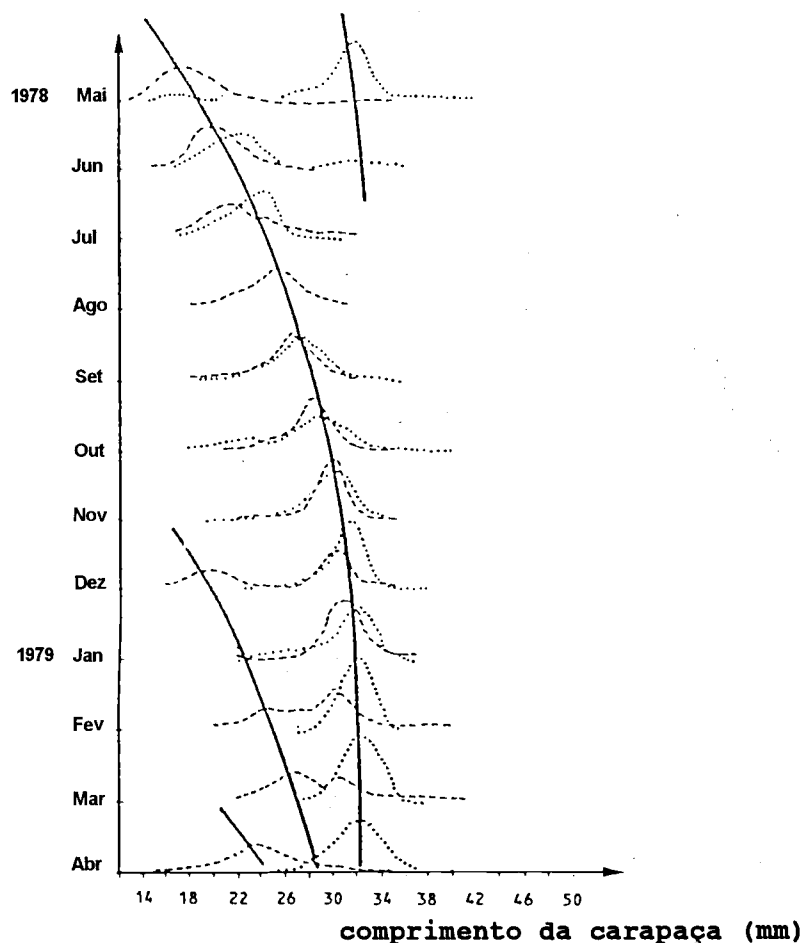


Fig. 3.4.2.6 Exemplo da análise de progressão modal. Distribuições de comprimento das capturas de *Penaeus semisulcatus* nas capturas artesanais (---) e industriais (....) em águas do Kuwait (de Mohamed *et al.*, 1979)

de comprimento. Tal exemplo é mostrado na Fig. 3.4.2.6, que se refere a capturas comerciais do camarão *Penaeus semisulcatus* em águas do Kuwait (de Mohamed et al., 1979). Esta espécie tem uma duração de um a dois anos de vida, e existem duas coortes por ano. A maioria das amostras contém uma só moda, de forma que a abordagem da amostra única não é aplicável. No entanto, o seguimento da progressão das modas, neste caso, parece uma coisa simples. A análise de progressão modal é especialmente útil para tais espécies de vida curta.

### **Programas de computadores**

O Programa "MODALPR" no pacote de programas LFSA pode executar a análise de progressão modal como descrito acima. O pacote LFSA permite também continuar, a partir da análise de Bhattacharya (programa "BHATTAC"), com uma estimação, através dos mínimos quadrados, dos parâmetros de crescimento (programa "VONBER", ver Secção 3.3.4), em vez do método de Gulland e Holt. O pacote "COMPLEAT ELEFAN" contém um programa "MPA" para fazer a análise de progressão modal. Um programa similar foi incorporado ao FISAT. Existem vários outros programas disponíveis que tentam solucionar o problema tratado nesta secção, alguns dos quais serão discutidos na Secção 3.5.

### **Manipulação de dados**

Procedendo-se à análise de Bhattacharya e à análise de progressão modal num computador, pode-se sempre experimentar, como rotina, diferentes agrupamentos de dados, de modo a fazer a chamada "manipulação" ou "reestruturação de dados". A Tabela 3.4.2.5 ilustra o processo de manipulação de dados. A parte A contém os dados originais, ou seja uma série temporal de 14 amostras mensais de frequências de comprimento, agrupados em 16 classes de 1 cm. Da parte A para a B, os dados foram agrupados em 8 classes de 2 cm de comprimento, e da parte B para C os dados foram novamente agrupados em 5 grupos trimestrais. Às vezes, a "manipulação" de dados torna a estrutura de dados mais evidente (entendendo-se como "estrutura" as rectas nos métodos gráficos de Bhattacharya e na progressão modal).

Se os dados são agrupados em classes tão pequenas que o "ruído aleatório", dentro de cada célula da tabela, esconde a estrutura dos dados, deve-se manipulá-los. Também se pode observar o problema oposto, nomeadamente em que os dados são agrupados em intervalos de classes tão grandes, que a estrutura fica escondida atrás do agrupamento. Se os dados básicos são agrupados em intervalos de classe tão grandes (em comprimento ou em tempo), não há nada que se possa fazer para resolver o problema. Portanto, deve-se sempre anotar os dados básicos em um agrupamento tão pequeno quanto a prática o permita. Por exemplo, se houver dúvida entre usar classes de 1 ou 2 cm, usar sempre classes de 1 cm, pois pode-se, facilmente, converter classes de 1 cm em classes de 2 cm, enquanto a conversão oposta, é impossível. A manipulação de dados tem que ser feita geralmente, antes de se realizar uma análise conjunta de Bhattacharya/Progressão Modal, bem sucedida.

(Ver **Exercício(s)** na Parte 2).

### **3.4.3 Método do papel de probabilidades e o método da parábola**

Existem outras técnicas de analisar distribuições normais compostas para além da análise de Bhattacharya, são métodos basicamente "manuais", e contém uma certa dose de subjectividade.

Um deles, o método de probabilidades, introduzido por Harding (1949) e desenvolvido por Cassie (1954), tem como base o facto de que uma distribuição normal torna-se linear quando marcada em papel de probabilidades. Uma mistura de várias distribuições normais dão uma recta mais complexa com pontos de inflexão e, como no método de Bhattacharya, as distribuições normais individuais podem ser removidas uma a uma.

**Tabela 3.4.2.5 Ilustração do processo de "manipulação" dos dados.  
Para mais explicações, ver o texto.**

**A: DADOS BÁSICOS:** classes de 1 cm de comprimento por mês

classe compr.	1981										1982			
	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ	JAN	FEV	MAR	ABR
4- 5														
5- 6														
6- 7														
7- 8														
8- 9				18	24	12								
9-10				21	51	16								
10-11														
11-12														
12-13														
13-14														
14-15														
15-16														
16-17														
17-18														
18-19														
19-20														

**B: DADOS MANIPULADOS:** classes de 2 cm de comprimento por mês

classe compr.	1981										1982			
	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ	JAN	FEV	MAR	ABR
4- 6														
6- 8														
8-10				39	75	28								
10-12														
12-14														
14-16														
16-18														
18-20														

**C: DADOS MANIPULADOS:** classes de 2 cm de comprimento por trimestre

classe compr.	1981			1982		
	MAR	JUN	SET	DEZ	MAR	MAI
4- 6						
6- 8						
8-10		142				
10-12						
12-14						
14-16						
16-18						
18-20						

Outro método é o da parábola introduzido por Hald (1952) e utilizado em investigação pesqueira por Tynaka (1953), a base matemática é a transformação de uma distribuição normal em uma parábola, através de logaritmos (ver Secção 2.6, Eq. 2.6.3). Com este método, a parábola é ajustada aos logaritmos das frequências de comprimento compostas. Este procedimento é similar ao

método mais sofisticado de Bhattacharya, baseado no facto de as diferenças entre pontos equidistantes em uma parábola formarem uma linha recta.

O método de Bhattacharya parece deixar menos decisões subjectivas ao investigador, do que os outros métodos. No entanto, pessoas experientes na aplicação do método do papel de probabilidades, bem como no da parábola, também parecem chegar a resultados plausíveis.

### 3.5 AJUSTE DE CURVAS DE CRESCIMENTO ATRAVÉS DE PROGRAMAS DE COMPUTADOR

Os métodos apresentados na Secção 3.4 tratam, basicamente, dos dados, amostra por amostra. Geralmente, o traçado das curvas de crescimento torna-se mais fácil quando se considera toda a série de tempo. Algumas amostras podem ser, de forma inequívoca, fáceis de interpretar em componentes de uma còorte, e de determinar a curva de crescimento. Usando os resultados encontrados para as amostras "fáceis", somos também capazes de dar interpretações correctas das amostras que, de outra maneira, não seríamos capazes de interpretar.

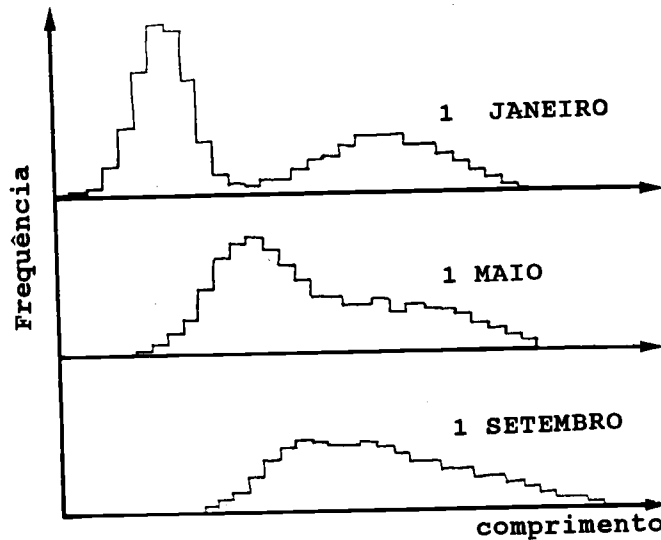


Fig. 3.5.0.1 Exemplos de uma amostra "fácil" (Janeiro) e duma amostra "difícil" (Setembro)

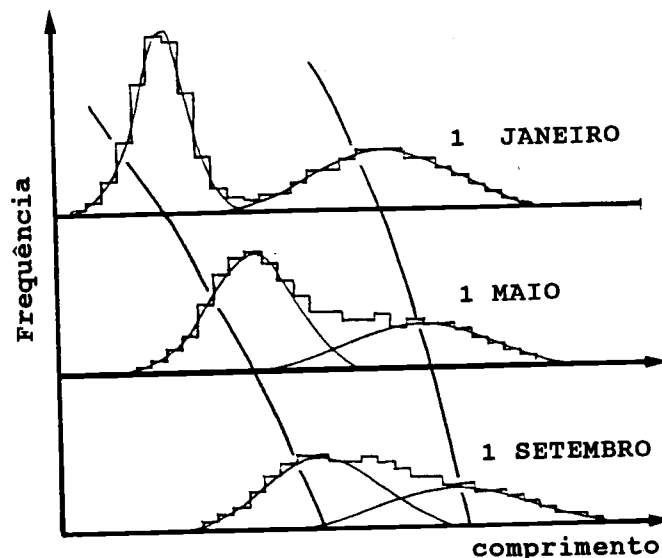


Fig. 3.5.0.2 Exemplo hipotético de como uma amostra "fácil" (Janeiro) é usada para tratar uma amostra "difícil" (Setembro)

Esta característica é ilustrada nas Figs. 3.5.0.1 e 3.5.0.2. A amostra de Janeiro na Fig. 3.5.0.1 parece fácil de ser resolvida em duas coortes, como mostrado na Fig. 3.5.0.2, enquanto a de Setembro não mostra qualquer estrutura. A amostra de Maio parece mais problemática que a de Janeiro, mas ainda possível de interpretar. Contudo, as amostras de Janeiro e Maio juntas mostram uma situação clara da qual pode-se estimar uma curva de crescimento. Extrapolando a curva de crescimento para a amostra de Setembro, podemos agora, separá-la em coortes.

Este tratamento pode ser aplicado quando se usa o método manual, especialmente quando auxiliado por um computador. É possível, no entanto, deixar o computador realizar a análise usando técnicas mais sofisticadas, tais como a técnica de estimar pelo método dos mínimos quadrados, (ver a Secção 3.3.4).

Os métodos baseados em computador, aqui tratados, requerem tantos cálculos que é quase impossível realizá-los à mão. Apresentamos duas aproximações alternativas:

1. O método "ELEFAN I" (Eletronic Length-Frequency ANalysis), (ou seja, a análise eletrônica de frequências de comprimento)
2. O método da "máxima verosimilhança".

O primeiro foi introduzido por Pauly e David (1981), o segundo pode ser considerado como uma versão informatizada do método de Bhattacharya. Baseia-se na teoria tradicional de análise estatística de amostras de frequências, e pode-se considerar como uma versão generalizada da análise de regressão linear. A filosofia básica, por detrás dos dois métodos, é semelhante.

Uma discussão pormenorizada de métodos baseados em computadores é considerada um tema fora dos objectivos deste manual. O principal propósito é apresentar alguns aspectos básicos dos métodos, pretendendo, assim, encorajar o leitor a aprofundar os seus conhecimentos neste campo.

### 3.5.1 ELEFAN I

O programa "ELEFAN I" trata da estimação de parâmetros de crescimento, usando a análise de frequências de comprimentos (Pauly e David, 1981; e Pauly 1987). O pacote ELEFAN ainda está em desenvolvimento, e a descrição mais recente de todo o pacote pode ser encontrada em Pauly (1987).

#### **Exemplo 12: Aplicação do ELEFAN I para os dados da truta coral**

Para ilustrar o ELEFAN I foram usados os dados da truta coral mostrados na Fig. 3.4.0.2. O ELEFAN I consiste em duas etapas básicas:

**Etapla 1:** Reestruturação das frequências de comprimento

**Etapla 2:** Ajuste de uma curva de crescimento

**Etapla 1,** o processo de reestruturação está ilustrado na Fig. 3.5.1.1, onde a parte "a" mostra os dados originais apresentados, por Goeden (1978), em classes de comprimento de 0.5 cm. Para remover pequenas irregularidades, os dados foram rearranjados em classes de 2 cm de comprimento, como mostrado na parte "b". A curva na parte "b" é a "frequência média móvel" entre 5 classes de comprimento. O método para obter uma média móvel é ilustrado para o intervalo de comprimento de 26-28 cm:

Intervalo	Frequência	
18-20	0 *	
20-22	0 *	
22-24	2	} > média móvel = $\frac{2+11+15+6+10}{5} = 8.8$
24-26	11	
26-28	15	
28-30	6	
30-32	10	
.....		

Para os duas primeiras classes de comprimento 22-24 e 24-26 cm, os valores são calculados pela adição de dois zeros e um zero respectivamente, como indicado por "\*" (um procedimento semelhante é aplicado às últimas classes de comprimento). A curva que resulta deste procedimento é usada para realçar os picos (barras sombreadas acima da média móvel) e as depressões interdiárias. Na parte "c" as frequências originais da parte "b" foram divididas pela média móvel e subtraídas de 1. Considerando novamente, a classe de comprimento 26-28 cm, vem:

$$15/8.8 - 1 = 0.7 \text{ "pontos"}$$

De facto, foram realizados outros menores ajustes, mas não aprofundaremos esse processo. Usando o processo de reestruturação, os picos e as depressões ficaram bem estruturados e fáceis de identificar pelos "pontos" atribuídos. Notar que aos picos claros foram atribuídos um número semelhante de pontos sem ter relação com o número de peixes que eles representam.

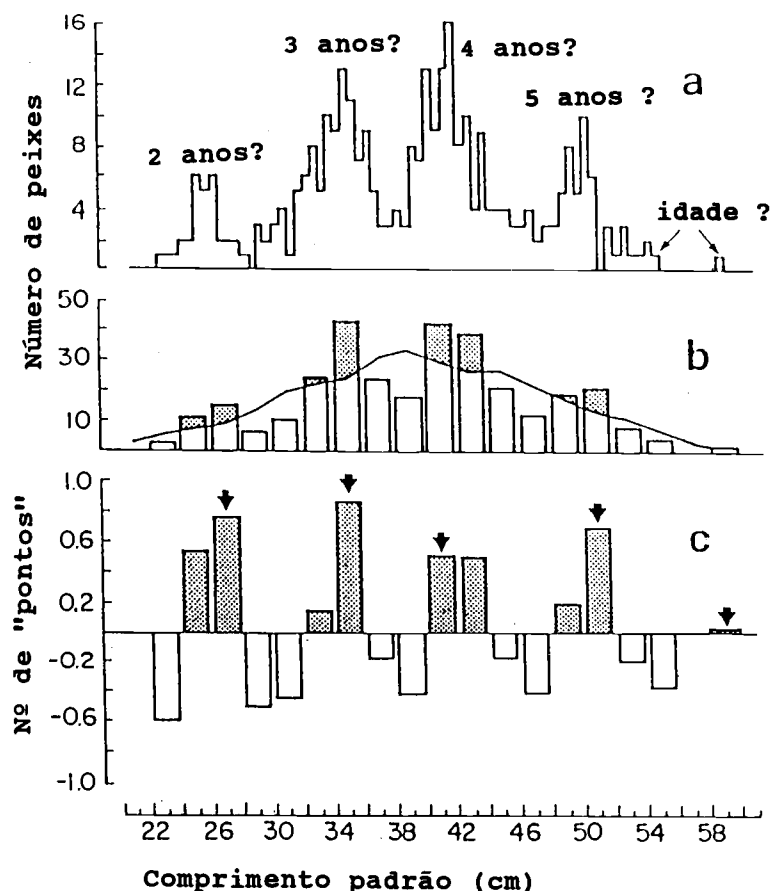


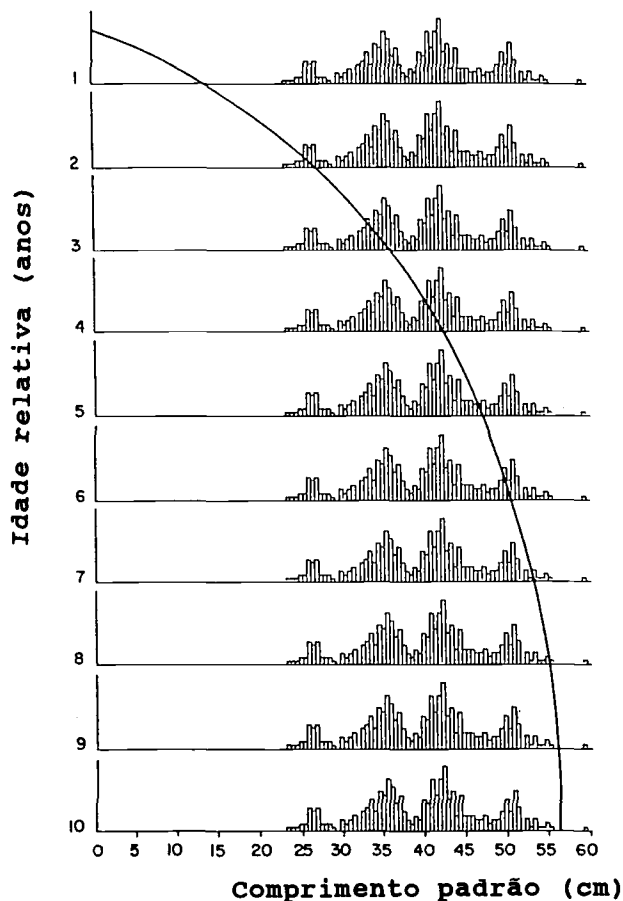
Fig. 3.5.1.1 Exemplo da reestruturação de uma amostra de frequências de comprimento pelo ELEFAN I (de Pauly e David, 1981). Dados de Goeden, (1978), da truta coral (*Plectropomus leopardus*)

**Etapa 2**, o ajuste de uma curva de crescimento está ilustrado nas Figs. 3.5.1.2 e 3.5.1.3.

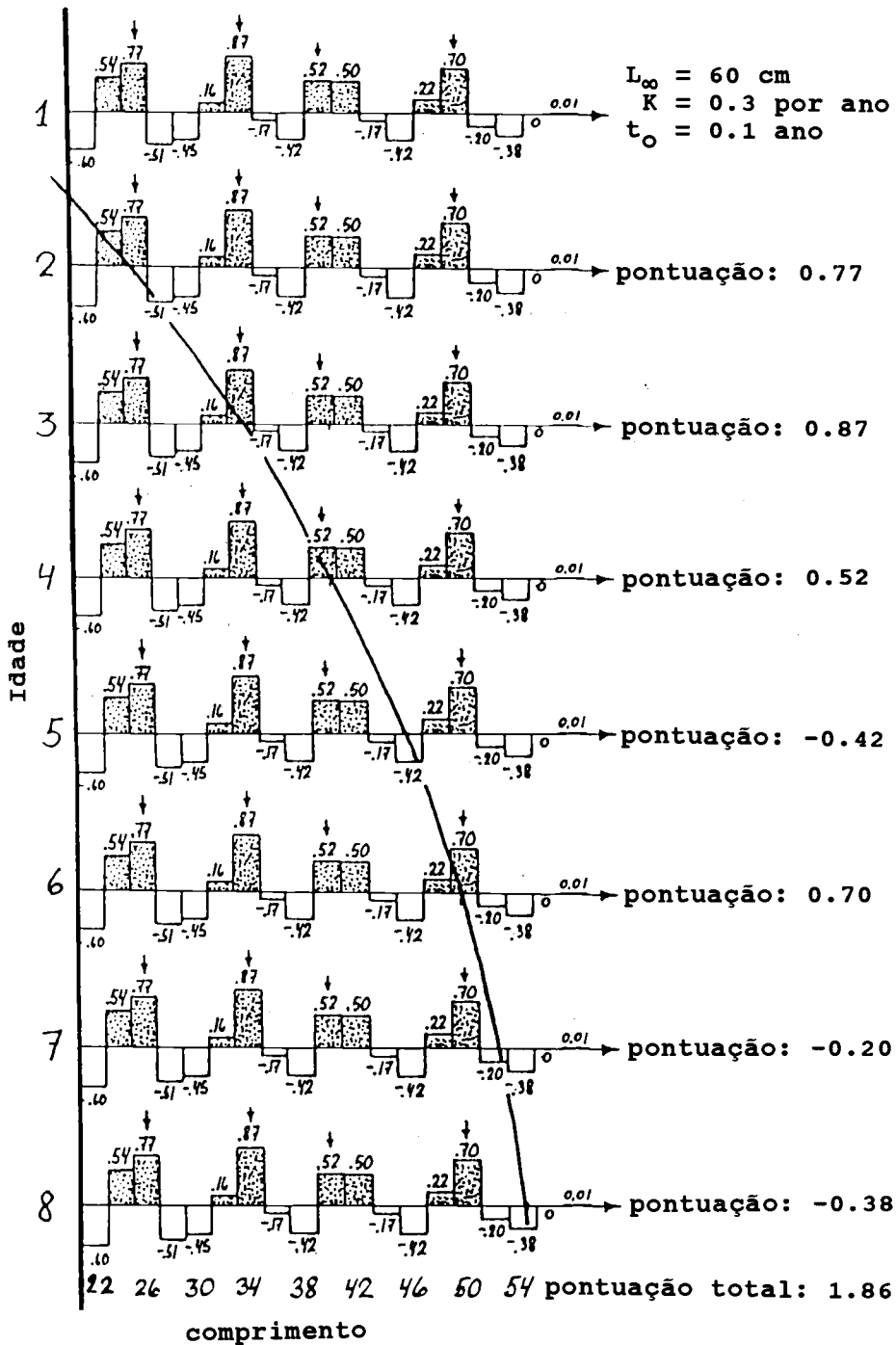
No exemplo em questão, para a truta coral, só foi usada uma amostra. Para ajustar curvas de crescimento pelo ELEFAN I devemos ter, de preferência, uma série de amostras no tempo. O ELEFAN I é basicamente uma análise de progressão modal; no entanto, se não tiver disponível uma série temporal, podemos contornar o problema assumindo apenas uma, e simplesmente repetir a amostra para uma amplitude adequada de anos, assumindo que todas as coortes seguem a mesma curva de crescimento. Deste modo, o ELEFAN I pode ser aplicado tanto para o caso de uma única amostra, como para uma série temporal.

Se a série no tempo durante os dez anos, mostrada na Fig. 3.5.1.2, for uma série real, nós deveríamos obter, em cada ano, frequências ligeiramente diferentes. A Fig. 3.5.1.3 mostra oito repetições da amostra reestruturada, arranjada de modo semelhante à Fig. 3.5.1.2. É difícil ajustar uma curva às frequências originais na Fig. 3.5.1.2, e não é possível, somente com um ajuste visual, arranjar um critério objectivo para saber qual a curva melhor. As amostras reestruturadas na Fig. 3.5.1.3 são, no entanto, mais fáceis de ajustar porque os picos e depressões foram exagerados.

Com os dados reestruturados (os "pontos" mostrados na Fig. 3.5.1.1c), tornou-se possível definir uma medida objectiva da bondade do ajuste, para a qual Pauly e David (1981) sugeriram a razão "ESP/ASP", onde "ESP" corresponde à "Soma dos Picos Explicáveis" ("Explained Sum of Peaks") e "ASP" à "Soma dos Picos Disponíveis" ("Available Sum of Peaks").



**Fig. 3.5.1.2** Amostra de frequências de comprimento da Fig. 3.5.1.1a repetida por 10 anos, para simulação de séries temporais de amostras (compare com a Fig. 3.5.1.3)



$$\frac{ESP}{ASP} = \frac{1.86}{2.86} = 0.65$$

Fig. 3.5.1.3 Amostra de frequências de comprimento reestruturada da Fig. 3.5.1.1c repetida por 8 anos, simulando uma série temporal de amostras. (Compare com a Fig. 3.5.1.2). Uma única curva de crescimento, determinada pelos parâmetros  $L_{\infty} = 60 \text{ cm}$ ,  $K = 0.3 \text{ por ano}$ , é testada pela bondade do ajuste (ESP/ASP)



Para compreender o conceito de "ESP", considere a Fig. 3.5.1.3. O ajuste mais convincente de uma curva de crescimento é aquele que atinge todos os picos indicados pelas setas. Contudo, pode não existir tal curva de crescimento de von Bertalanffy, e portanto, introduziu-se o conceito de "pontuação" para medir o quanto uma curva pode se aproximar do melhor ajuste. Sempre que uma curva atinge uma barra, seja positiva ou negativa, ela conta "pontos" (ver Fig. 3.5.1.1). A pontuação total de uma curva de crescimento é a soma dos pontos contados de cada amostra, como ilustrado na Fig. 3.5.1.3.

"ASP" (soma dos picos disponíveis) é a pontuação máxima que uma curva pode alcançar, isto é, a soma dos picos positivos, indicados pelas setas. Uma seta ocorre sempre que exista uma sequência de barras positivas. (Neste contexto, uma "sequência" pode ser uma única barra). A razão ESP/ASP torna-se, assim, uma medida de quanto uma curva está próxima do melhor ajuste possível.

Os cálculos descritos acima podem ser realizados manualmente para uma única curva de crescimento, dentro de um período razoável, mas depois é impossível (na prática) seguir à mão os cálculos efectuados pelo ELEFAN I. Uma das principais características do ELEFAN I é que muitas (digamos milhares) das diferentes curvas de crescimento são testados na forma descrita na Fig. 3.5.1.3., e entre as milhares de curvas alternativas de crescimento, aquela que produzir o valor de ESP/ASP mais alto é a seleccionada.

(Ver **Exercício(s)** na Parte 2).

### 3.5.2 Equação de crescimento sazonal de von Bertalanffy

A Fig. 3.5.2.1 mostra uma aplicação do ELEFAN I para o camarão peneídeo. Esta curva estimada pelo ELEFAN I não é, claramente, uma curva de crescimento de von Bertalanffy, pois  $\Delta L/\Delta t$  não decresce linearmente com a idade, (ver Secção 3.1). A explicação é que o ELEFAN I trabalha com a "Equação de crescimento sazonal de von Bertalanffy" (Pitcher e Macdonald, 1973; Cloern e Nichols, 1978 e Pauly e Gaschütz, 1979):

$$L(t) = L_{\infty} * [1 - \exp\{-K*(t-t_0) - (CK/2\pi)*\sin(2\pi*(t-t_s))\}] \quad (3.5.2.1)$$

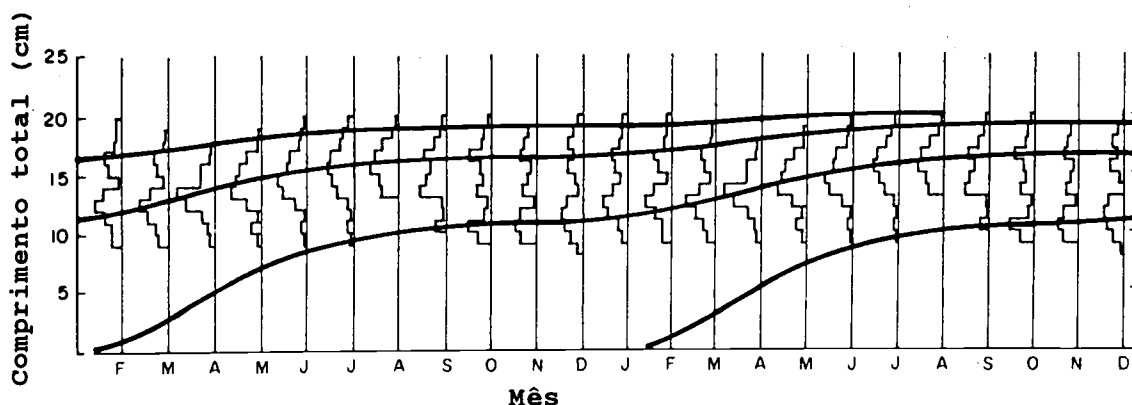


Fig. 3.5.2.1 Exemplo de uma curva de crescimento oscilando sazonalmente, estimada pelo ELEFAN I (de Pauly, 1981). Dados de Rodríguez (1977) de fêmeas de camarão, (*Penaeus kerathurus*) de Cadiz, Espanha. Note que os dados eram disponíveis para um ano, e foram repetidos para simular dois anos de amostragem. Os parâmetros estimados são:  $L_{\infty} = 21.0$  cm (comprimento total),  $K = 0.8$  por ano,  $C = 0.9$ ,  $t_w = 0.8$  (ponto de inverno),  $ESP/ASP = 0.46$

Esta é a equação usual de von Bertalanffy (Eq. 3.1.0.1) com um termo extra:

$$(CK/2\pi) * \sin(2\pi * (t-t_s)) \quad (\text{onde } \pi = 3.14159..)$$

Este termo produz as oscilações sazonais na taxa de crescimento, nomeadamente mudando  $t_0$  durante o ano. O parâmetro "ts" é chamado "ponto de verão" e assume valores entre 0 e 1. Na época do ano em que a fracção ts decorreu, a taxa de crescimento é mais elevada. No tempo  $t_w = ts+0.5$ , que é o "ponto de inverno", a taxa de crescimento é mais baixa. O parâmetro C, a "amplitude", assume, geralmente também, valores entre 0 e 1. Se  $C = 0$ , a Eq. 3.5.2.1 resume-se à equação usual de von Bertalanffy, ou seja,  $C = 0$  implica não haver sazonalidade na taxa de crescimento e quanto maior o valor de C mais pronunciadas são as oscilações sazonais. Se  $C = 1$  a taxa de crescimento torna-se zero no ponto de inverno. A Fig. 3.5.2.2 mostra uma curva de crescimento sazonal onde  $C = 1$ , juntamente com uma curva comum de von Bertalanffy ( $C = 0$ ). Todos as outras curvas sazonais com valores diferentes de C (mas com os outros parâmetros mantidos constantes) encontram-se na área a sombreado.

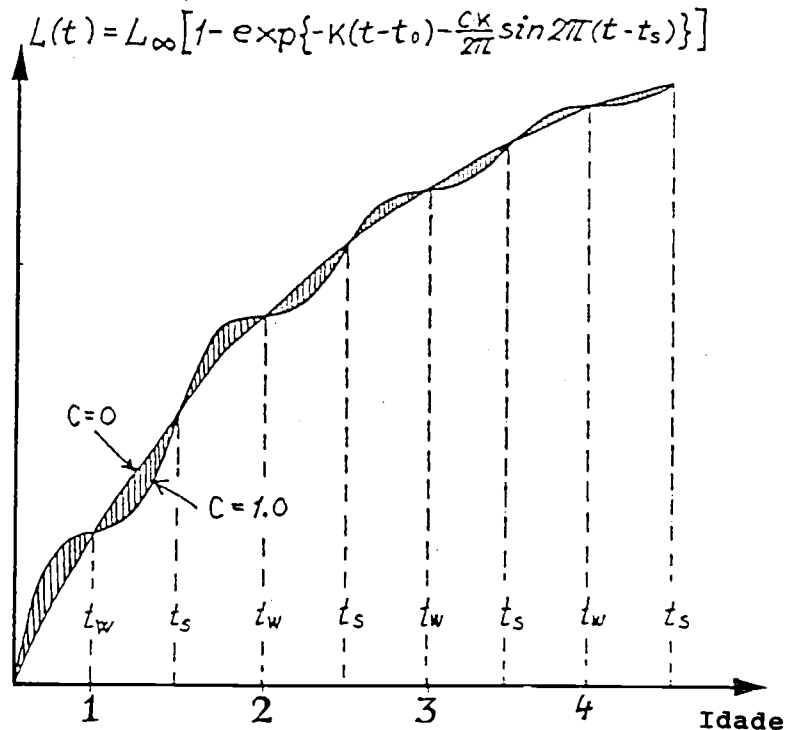


Fig. 3.5.2.2 A equação sazonal de crescimento de von Bertalanffy. Note que para  $C = 1$ , a taxa de crescimento é zero nos pontos de inverno (a curva é horizontal)

### 3.5.3 Métodos de máxima verosimilhança

O cálculo do valor médio como descrito na Secção 2.1, e o método dos mínimos quadrados descrito na Secção 3.3.4, são aplicações do "princípio de máxima verosimilhança".

O método a ser descrito nesta secção visa solucionar os mesmos problemas, e mais alguns, do que o método ELEFAN I e a principal diferença reside na definição da bondade do ajuste. O ELEFAN I usa a razão ESP/ASP (ver Secção 3.5.1), enquanto o "método de máxima verosimilhança" usa a soma (ponderada)

dos quadrados dos desvios entre o modelo e as observações (ou medidas com propriedades semelhantes). Em princípio, esta medida da bondade do ajuste é a utilizada na análise de regressão linear (ver Eq. 2.4.3 e a Fig. 2.4.2).

A completa teoria estatística que está por detrás deste método é complicada, e igualmente o programa de computador utilizado. No entanto, um cientista pesqueiro usando o programa não necessita conhecer todos os passos técnicos. Porém se os princípios básicos do método forem entendidos, haverá poucas dificuldades na utilização do programa.

A idéia básica do ELEFAN I, de seguir a progressão de modas e testar um grande número de combinações alternativas dos parâmetros de crescimento, é também a idéia básica onde assenta o método de máxima verosimilhança. A medida da bondade do ajuste utilizada neste método, está bastante relacionada com o chamado "teste do qui-quadrado", que é conceitualmente simples e, portanto, usado na seguinte explicação do método.

Na Fig. 3.5.3.1 é apresentada uma amostra de frequências de comprimento, e assumimos que ela é composta por duas coortes. Ao usar o programa de máxima verosimilhança para aquela amostra, obtemos um resultado conforme ilustrado na Fig. 3.5.3.2, onde as curvas a ponteadas representam as duas coortes e a linha a cheio a soma das frequências calculadas das duas coortes. Os pontos indicam as frequências originais e observadas, e as barras as diferenças entre as frequências observadas e calculadas.

Além dos parâmetros de crescimento, o método de máxima verosimilhança também trabalha com os seguintes parâmetros (no caso de duas coortes):

- N1 = número total de observações na primeira coorte
- N2 = número total de observações na segunda coorte
- s1 = desvio padrão da primeira coorte
- s2 = desvio padrão da segunda coorte

Os comprimentos médios,  $\bar{L}_1$  e  $\bar{L}_2$ , provêm dos parâmetros de crescimento (ver Fig. 3.5.3.2, onde  $L_1$  e  $L_2$  correspondendo a idades arbitrárias  $t_1$  e  $t_2$ , são mostradas como um exemplo). A partir dos parâmetros, podem ser calculadas as frequências (teóricas) de cada coorte,  $fc_1(L)$  e  $fc_2(L)$  e a frequência total de cada classe de comprimento, como explicado na Secção 2.2

$$fc_{total}(L) = fc_1(L) + fc_2(L)$$

A medida da bondade do ajuste, ou seja "teste do qui-quadrado", é definida como:

$$\chi^2 = \sum \frac{[f_{obs}(L) - fc_{total}(L)]^2}{fc_{total}(L)} \quad (3.5.3.1)$$

que é a soma de todos os valores de  $fc_{total}(L) > 0$

onde  $f_{obs}(L)$  significa a frequência observada na classe de comprimento  $L$  (= ponto médio do intervalo) e é utilizado para minimizar as diferenças entre as frequências observadas e as calculadas ao longo de toda a gama de comprimentos da amostra. O método de máxima verosimilhança determina o grupo de parâmetros ( $L_\infty$ ,  $K$ ,  $t_0$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $s_1$  e  $s_2$ ) que minimiza o teste do qui-quadrado. Comparando com a Eq. 2.4.3 (" $fc_{total}$ " e " $f_{obs}$ " correspondem a " $a + b \cdot x(i)$ " e " $y(i)$ ", respectivamente) verifica-se a relação existente entre o teste do qui-quadrado e a regressão linear. A Fig. 3.2.2.2 mostra outro exemplo de como o método de máxima verosimilhança resultaria de uma amostra de frequências de comprimento, se o número de coortes dado fosse seis.

Como o teste do qui-quadrado é uma medida padrão da bondade do ajuste, quando lidamos com frequências a lista de referências que trata desse conceito é quase interminável. Uma boa introdução a esta teoria (escrita por biólogos) é dada em Sokal e Rohlf (1981, Capítulo 17).

Além dos parâmetros de crescimento o método de máxima verosimilhança também dá número de indivíduos e desvios padrão. O programa requer os mesmos dados de entrada que o programa ELEFAN I, mas também requer uma suposição do número de coortes na amostra. No entanto, este dado de entrada extra não parece criar grandes problemas práticos.

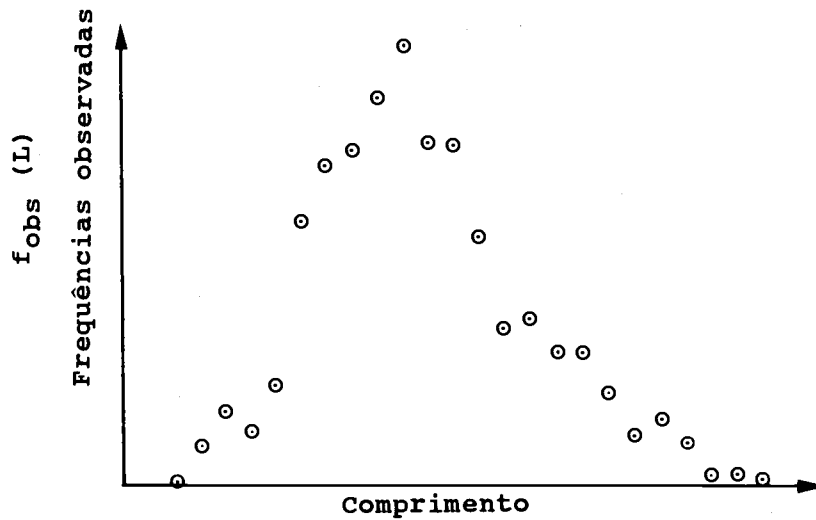


Fig. 3.5.3.1 Dados básicos dos quais se obtém as várias componentes distribuídas como uma normal na Fig 3.5.3.2

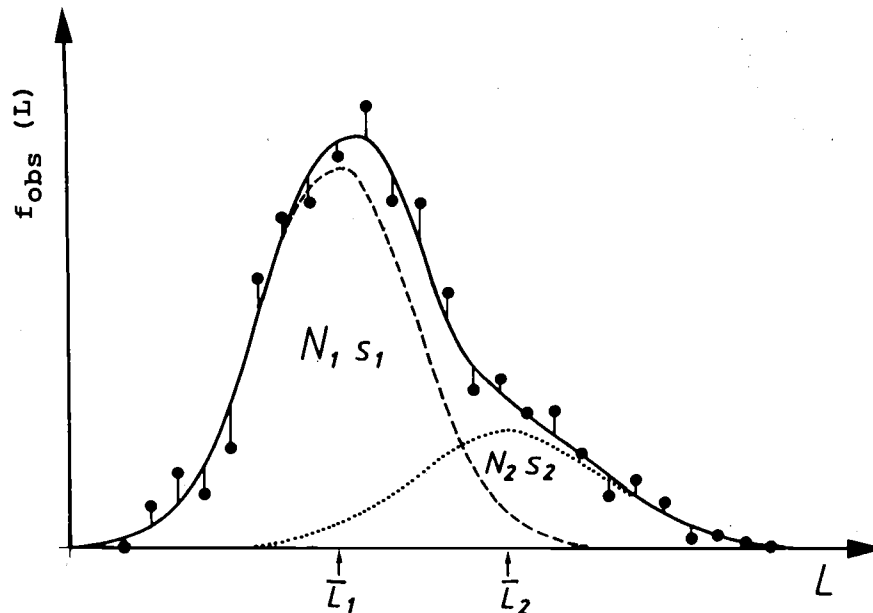


Fig. 3.5.3.2 Ilustração do teste do qui-quadrado. Os dados de entrada são os da Fig. 3.5.3.1. O número de coortes também tem que ser dado como entrada

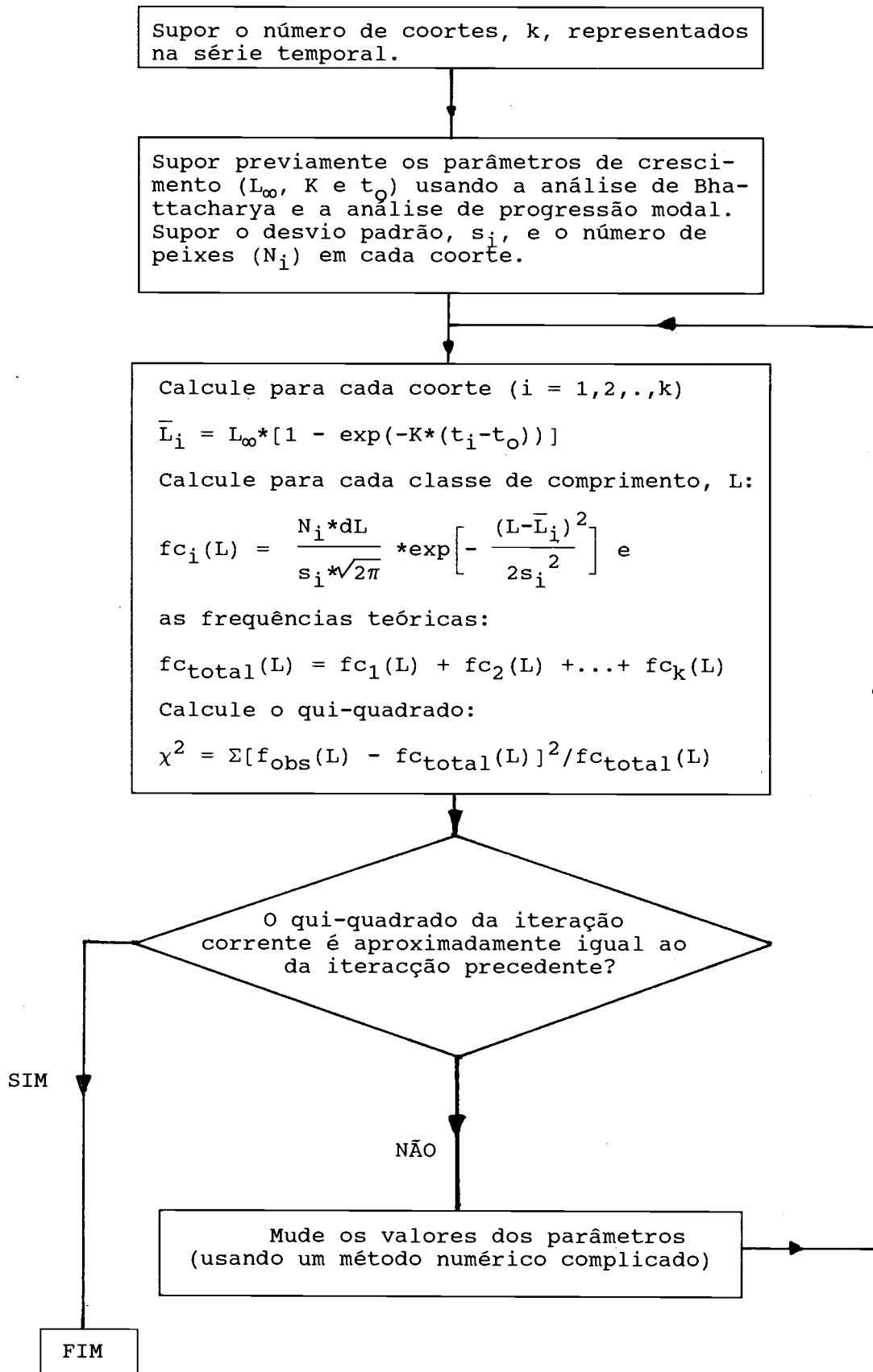


Fig. 3.5.3.3 Processo iterativo para estimar a máxima verosimilhança (ver também a Fig. 3.5.3.2)

O programa de máxima verosimilhança trabalha como um "processo iterativo", ou seja, ele precisa de iniciar o processo com uma suposição inicial, que depois é melhorada em vários passos iterativos. Assim, para começar a estimação da máxima verosimilhança, necessita-se de uma aproximação da solução final. Tal solução inicial pode ser obtida, por exemplo, da análise de Bhattacharya e análise de progressão modal, descritas nas Secções 3.4.1 e 3.4.2. O método de máxima verosimilhança não torna supérfluos os métodos manuais, pois são necessários para começar o processo iterativo e, talvez mais importante, para avaliar os resultados. A busca de um conjunto aceitável de valores iniciais é geralmente a parte mais demorada do processo.

A Fig. 3.5.3.3 ilustra os passos necessários da estimação de máxima verosimilhança. Geralmente, o ponto inicial é chamado de "suposição do valor inicial" da solução. Embora, chamar suposição possa não ser o mais apropriado, pois o valor tem que ser bastante próximo da solução final, para fazer convergir o processo iterativo. Portanto, é importante ter um método simples e confiável para conseguir uma primeira boa estimação da solução, que poderia ser, por exemplo, o método de Bhattacharya e a análise de progressão modal.

Outro aspecto do método de máxima verosimilhança é que ele dá estimações dos limites de confiança de todos os parâmetros, o que o método de Bhattacharya e a análise de progressão modal são incapazes de fazer. Os limites de confiança da análise de progressão modal, dados na Tabela 3.4.2.3, são baseados na suposição de que as estimações da análise de Bhattacharya têm uma variância zero. O método de máxima verosimilhança não necessita desta suposição (altamente falsa).

Concluimos esta breve discussão do método de máxima verosimilhança com algumas palavras sobre o seu desenvolvimento histórico. O primeiro trabalho neste campo é quase tão antigo quanto o trabalho pioneiro de Petersen sobre frequências de comprimento de peixes (ver Secção 3.4); é o de Pearson em 1894, apresentando o seu trabalho sobre separação de frequências de comprimento em componentes de distribuição normal.

### **Programas de computador**

Um dos primeiros programas de computador para separar frequências em componentes de distribuição normal, usando técnicas de máxima verosimilhança, é o programa "NORMSEP", de Hasselblad e Tomlinson (1971), baseado no trabalho de Hasselblad (1966). Outra contribuição importante, na separação de frequências de comprimento de peixes em componentes de distribuição normal, foi dada por MacDonald e Pitcher (1979). Trabalho este ampliado por Schnute e Fournier (1980) para incluir a estimação de parâmetros de crescimento no caso de uma única amostra. Esta contribuição, por sua vez, foi ampliada por Sparre (1987a) para tratar de séries temporais e de curvas sazonais de crescimento de von Bertalanffy, bem como de algumas outras coisas, cuja teoria é tratada na próxima secção. O programa NORMSEP está incluído no pacote FISAT.

### **3.5.4 Limitações da análise de frequências de comprimento**

Como surge dos exemplos (Secções 3.4 e 3.5), geralmente é difícil solucionar uma distribuição mista. Nos peixes mais velhos (os maiores peixes), é de se esperar que a separação em componentes possa ser problemática, quando os valores médios de componentes vizinhas estão localizados próximos uns dos outros comparando com o valor dos desvios padrão.

Aplicando métodos estatísticos mais rigorosos do que aqueles apresentados neste manual, Hasselblad (1966), McNew e Summerfelt (1978) e Clark (1981) mostraram que o "índice de separação".

$$I = \frac{\bar{L}(a+1) - \bar{L}(a)}{[s(a+1) + s(a)]/2} \quad (3.5.4.1)$$

é uma quantidade relevante a ter em conta, quando se avalia a possibilidade de uma separação bem sucedida entre duas componentes vizinhas.  $\bar{L}$  significa valor médio e  $s$  o desvio padrão (ver Fig. 3.5.4.1). Sem entrar em pormenores, as principais conclusões dos trabalhos mencionados acima podem ser assim sumarizados: Se o índice de separação for menor que dois,  $I < 2$ , é virtualmente impossível separar as componentes.

A Fig. 3.5.4.1 mostra um exemplo de duas componentes de distribuição normal com  $I = 2$ , e a Fig. 3.5.4.2 mostra a relação funcional típica entre o índice de separação e a variância das estimações. (Ver Hasselblad, 1966, por exemplo, para mais pormenores.)

Como exemplo, considere a Tabela 3.2.1.1 (isto é, os dados hipotéticos usados para ilustrar os métodos manuais). Na Tabela 3.5.4.1 os índices de separação foram calculados para as seis componentes conhecidas, uma vez que os dados são hipotéticos ou construídos. Suponha que os dados fossem reais e não conheciamos os parâmetros verdadeiros. Nesse caso, só se poderia estimar três componentes com índice de separação 4.82 e 2.43 respectivamente. Esta conclusão serve para todos os métodos, incluindo os mais sofisticados.

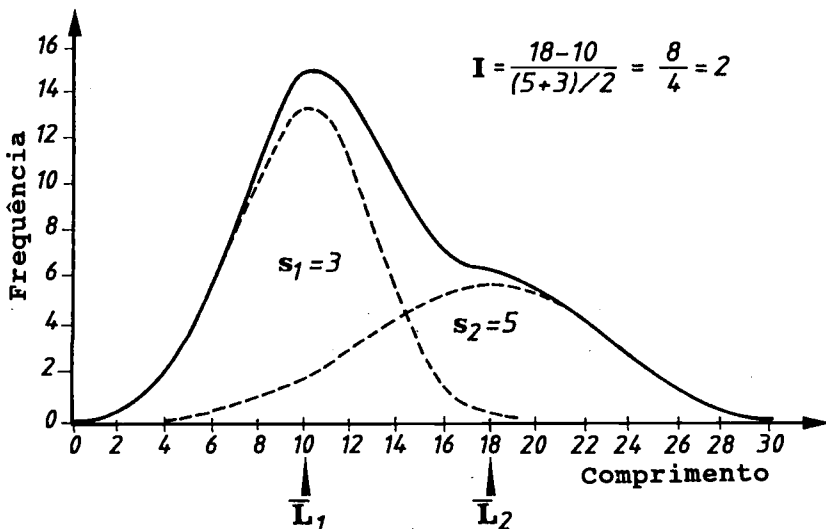


Fig. 3.5.4.1 Exemplo de duas componentes de distribuição normal com o índice de separação crítico, valor de  $I = 2$

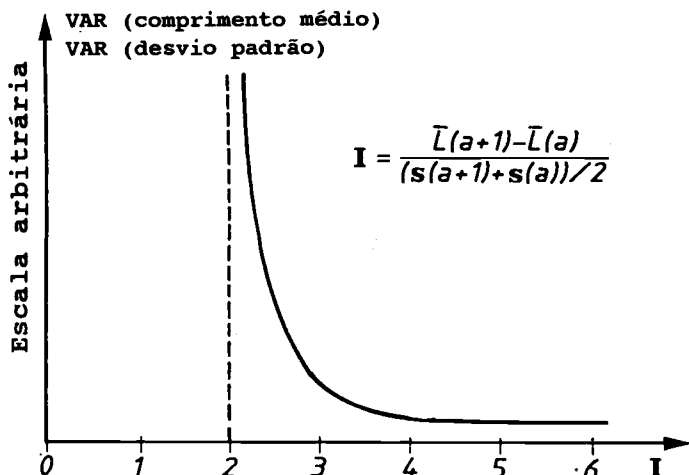


Fig. 3.5.4.2 Descrição geral da relação funcional entre o índice de separação,  $I$ , e as variâncias das estimações

**Tabela 3.5.4.1** Índices de separação calculados para o exemplo da Secção 3.4.1. Os parâmetros marcados com um "\*" não podem ser estimados somente com dados de frequências de comprimento (ver Tabela 3.2.1.1 e Fig. 3.2.2.2)

a	$\bar{L}(a)$	s(a)	$I = 2 * \frac{\bar{L}(a+1) - \bar{L}(a)}{s(a+1) + s(a)}$
1	17.3	1.7	4.82
2	27.9	2.7	
3	35.3	3.4	2.43
4	40.2 *	3.6 *	1.40
5	43.3 *	3.8 *	0.84
6	45.5 *	3.6 *	0.59

Outra forma de explorar as limitações da análise de frequências de comprimento é a "técnica de simulação de Monte Carlos", pela qual simulamos amostras de frequências de comprimento usando um computador (ver Secção 3.2.1). A técnica é chamada de "Monte Carlos" porque ela inclui uma componente de "variabilidade aleatória", o princípio da roleta, que é adicionada a todas as observações simuladas. Fazendo suposições sobre os valores dos parâmetros, a magnitude da componente aleatória, e simulando as amostras de frequências de comprimento correspondentes, podemos avaliar os vários métodos. O processo é o seguinte:

- Passo 1:** Fazer suposições sobre os valores dos parâmetros e a magnitude da componente estocástica.
- Passo 2:** Simular uma série de frequências de comprimento no tempo, de acordo com o passo 1.
- Passo 3:** Analisar os dados simulados (assumindo que os parâmetros são desconhecidos) usando, por exemplo, a análise de Bhattacharya e a progressão modal.
- Passo 4:** Comparar os resultados (se houver) do passo 3 aos parâmetros "reais" do passo 1.

Usando este processo, estaremos aptos a fazer afirmações tais como: se um manancial de peixes tem uma distribuição de comprimentos com certos parâmetros, então seremos capazes ou não de estimar os parâmetros de crescimento com uma certa precisão.

Em conexão com as limitações da análise de frequências de comprimento, deve-se também, mencionar as dificuldades na obtenção de amostras não viciadas. A fonte mais importante de erro resulta provavelmente da migração dos peixes. As limitações dos métodos baseados em comprimentos aplicados a mananciais de peixes migradores, são discutidas no Capítulo 11.